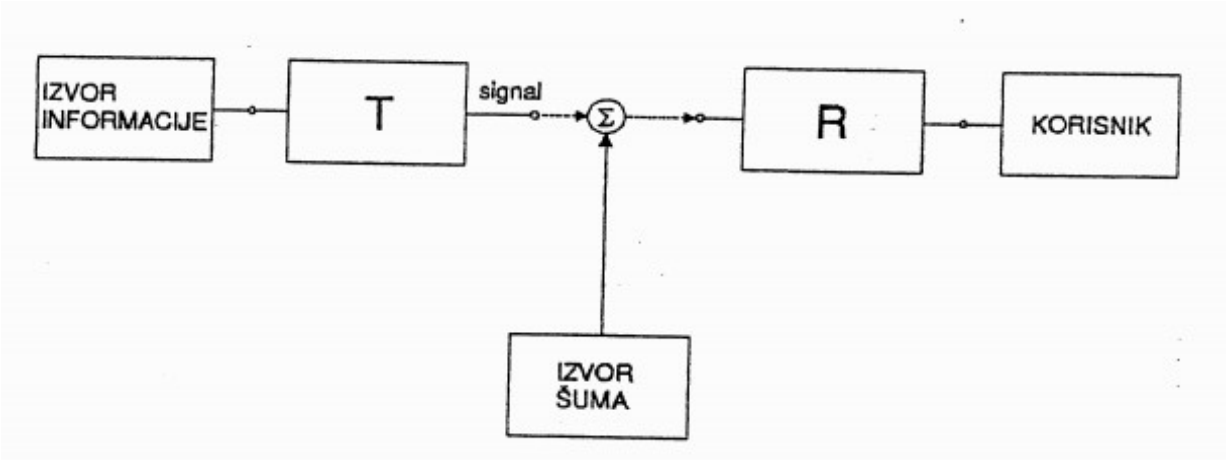
TK sistem, signali, Furijeovi redovi, Furijeova transformacija

- Uopšte gledano svaki telekomunikacioni sistem se može predstaviti jednim modelom (blok šemom) na osnovu koje shvatamo probleme koji se javljaju u toku prenosa bilo kakve poruke. Na sl.1.1 data je uprošćena blok šema telekomunikacionog sistema.



SL.1.1 - Blok šema uprošćenog modela telekomunikacionog sistema

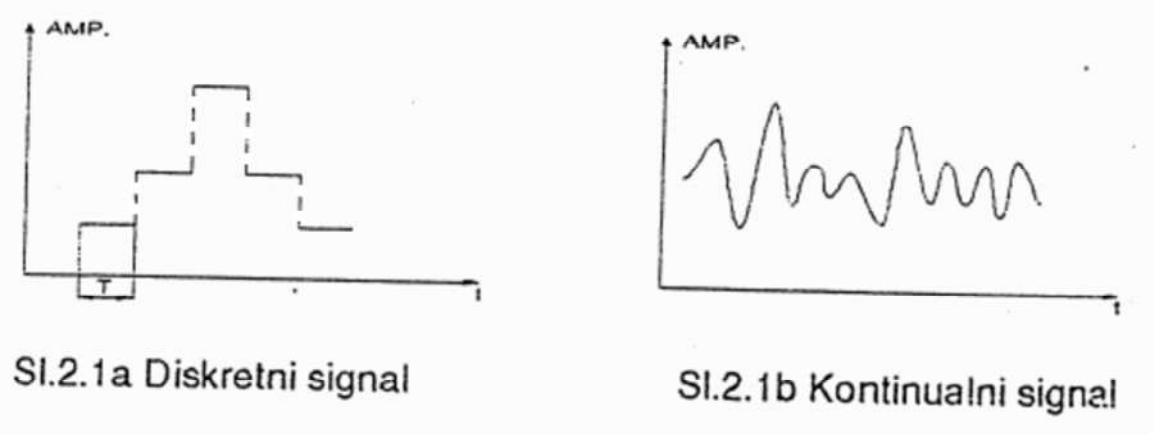
IZVOR INFORMACIJE, signal, T, Σ, R, KORISNIK, IZVOR ŠUMA

- Kao što vidimo sa slike, na početku svake veze nalazi se izvor informacije koji generiše poruke u različitom obliku: tekst, reči, brojevi, signal govora, signal muzike, sliku itd. Poruke u telegrafiji bile bi sastavljene od definisanih simbola po nekom kodu, u slučaju telefonskog prenosa to bi bila neka vremenska funkcija f (t), ako bi se radilo o prenosu slike u televiziji funkcija bi bila oblika f (x,y,t) gde su x,y koordinate elemenata slike a t vreme...

- Predajnik T (engleski: Transmitter) je sklop ili celina koja treba da izabranu poruku na pogodan način pretvori u signal koji će biti podesan za prenos na veće daljine. Ako bi se opšti model blok šeme detaljnije prikazao, u sklopu predajnika nalazili bi se sklopovi kao što je koder izvora ili kanalski koder, jer se skoro u svim slučajevima poruka obrađuje odnosno prevodi nekim kodom u pogodniji oblik za prenos.
- Linija veze je sredina kroz koju se signal prenosi od predajnika do prijemnika. Veza može biti fizički vod (vazdušni vod, koaksialni kabl, talsovod i sl.), niz pojačavača, radio veza, slobodni prostor itd.
- Prenos signala na većim razdaljinama ograničava se smetnjama (šumovima) koji se ubacuju u trasu i pojavljuju na mestu prijema zajedno sa signalom, pa kažemo da se produžavanjem veze sve više pogoršava odnos signal / šum, koji u jednom momentu postane manji od neke dozvoljene unapred definisane vrednosti čime kvalitet prenosa više ne zadovoljava međunarodne norme i veza se automatski ograničava.
- Prijemnik R (engleski: Receiver) je deo sistema veze koji po svojoj funkciji ima obrnutu ulogu od predajnika tj. da transformiše primljeni signal u poruku koja je bila poslata. Ako se radi o kodiranim porukama koje se prenose, onda u sklopu prijemnika mora postojati podsklop koji će obaviti obrnutu radnju - dekodiranje - i naziva se dekoder.
- Korisnik može biti u zavisnosti od poruke (čovek, mašina, neki indikator itd.). U svakom prenosu poruke osnovni cilj je da se " izlaz " izvora informacije reprodukuje na mestu prijema korisnika što vernije. Međutim često se pitanje vernosti prenosa ili idealne reprodukcije posmatra i drugačije. Naime često se kaže da je reprodukcija govora ili muzike odlična ili kvalitet slike odličan, mada smo svesni da ta slika koju gledamo tj. koju reprodukuje TV prijemnik nije ista kao slika koja je bila ispred TV kamere. Ovo znači da u procesu prenosa izvor - korisnik postoje neki kriterijumi o tome da li je reprodukcija verna ili ne. Ovaj kriterijum neće biti isti kada je čovek korisnik poruke ili mašina.

KLASIFIKACIJA SIGNALA

- U telekomunikacijama je uobičajeno da se informacije nazivaju ***porukama***. Fizička predstava informacije naziva se ***signal***. Signal je električni lik poruke. To znači da će se informacija o nekom događaju prenositi uvek pomoću signala.
- Svi signali tj. vremenske funkcije mogu se podeliti u dve velike grupe, **prema obliku signala u vremenu** tj. prema tome da li imaju ili nemaju tačke prekida. U prvom slučaju radi se o **disktretnim signalima**, a u drugom o **kontinualnim**.
- Diskretne poruke se javljaju kao nizovi vremenski odvojenih elemenata od kojih je svaki okarakterisan jednom od konačno mnogo takvih poruka.
- Kontinualne poruke se javljaju kao signali čije amplitude uzimaju ma koju vrednost i ne postoje tačke prekida.



Sl.2.1a Diskretni signal

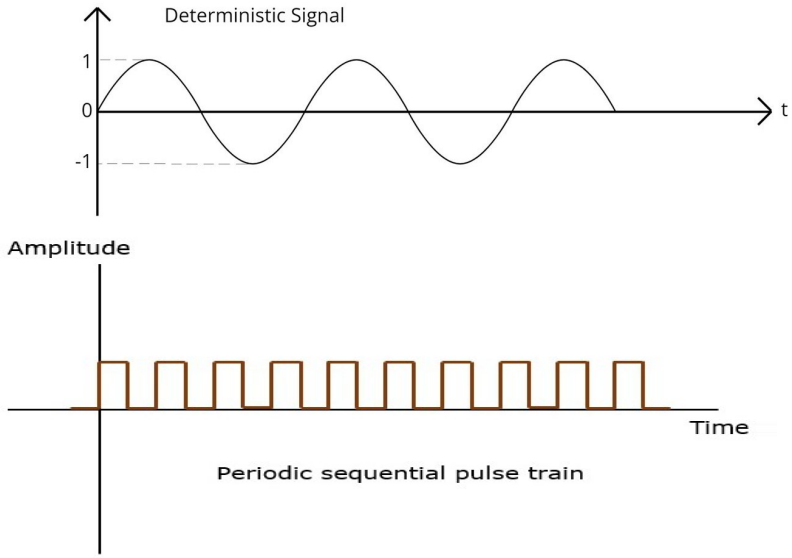
Sl.2.1b Kontinualni signal

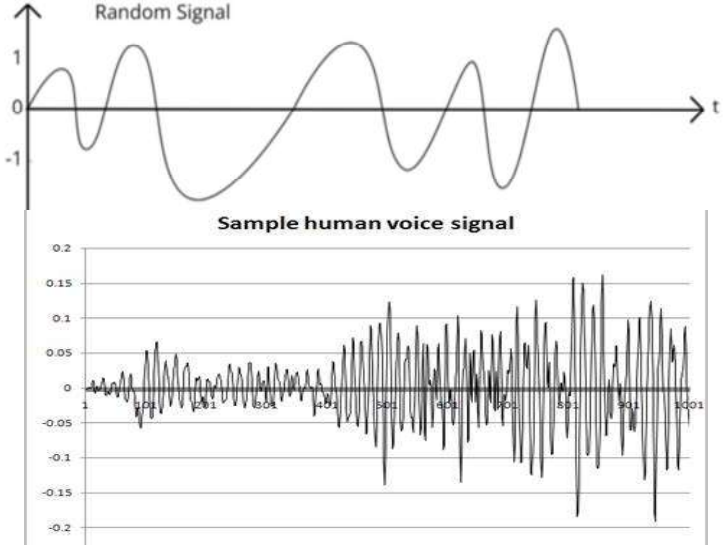
KLASIFIKACIJA SIGNALA

- **Prema svojoj prirodi, tj. po ponovljivosti u vremenu,** signali se mogu podeliti na**: determinističke i slučajne.**

- Deterministički signali su signali čiji je vremenski oblik uvek poznat, tj. čije se ponašanje može opisati matematičkim izrazom. Tipični primer determinstičkih signala je signal napona u uticnici, ili signal konstantne povorke impulsa (npr. povorka kontrolnih bitova, koja ima uvek isti oblik, koja se prenosi npr. serijskom vezom ili kroz Ethernet kabli).

- Slučajni signali su signali koji se ne mogu opisati matematičkim izrazom zbog toga što su trenutne vrednosti ovakvih signala slučajnog karaktera. Tipični primer slučajnih signala je govorni signal.





SPEKTRALNA ANALIZA PERIODIČNIH SIGNALA

- Svaku periodičnu funkciju, uz određena ograničenja sa matematičke strane, možemo da predstavimo u obliku harmonijskog Furijeovog reda, tj. da rastavimo u Furijeov red oblika:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(Q_n \cos n\omega_1 t + P_n \sin n\omega_1 t \right)$$

koji predstavlja zbir jednosmerne komponente signala (matematički i fizički srednje vrednosti signala):

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt$$

i prostoperiodičnih komponenti oblika: $Q_n \cos n\omega_1 t$ i $P_n \sin n\omega_1 t$

čije su amplitude date izrazima:

$$Qn = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t\, dt$$

$$Pn = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t\, dt$$

- Osnovna kružna učestanost, tj. učestanost osnovnog ili prvog harmonika data je izrazom: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1$ gde je T perioda signala s(t)

Na osnovu ovoga se vidi da se perioda T prvog harmonika poklapa sa periodom datog signala s(t) i naziva se osnovna ucestanost.

Pošto je učestanost prvog harmonika $f_1 = 1 / T$, učestanost n-tog harmonika je $f_n = n f_1$, a njegova kružna učestanost je $\omega_n = n \omega_1 = n\, 2\, \pi\, f_1$.

Osim ovog oblika Furijeovog reda, kojim može da se predstavi lik signala, postoji i drugi, nešto prostiji, oblik koji se vrlo često koristi i koji predstavlja sažeti vid prvog oblika Furijeovog reda: $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n (\cos n\omega_1 t + \varphi_n)$

U ovom slučaju je srednja vrednost signala, član $a_0 / 2$, ista kao i ranije, amplituda n-tog harmonika je data izrazom: $S_n = \sqrt{P_n^2 + Q_n^2}$

gde su P_n i Q_n određeni za prvi oblik Furijeovog reda.

- Ugao φn predstavlja fazni stav n-te harmonijske komponente signala u početnom trenutku vremena i dat je izrazom: $tg\,\varphi_n = -\frac{P_n}{Q_n}$

Furijeov red može da se predstavi i u kompleksnom obliku:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S_n} e^{j\,n\,\omega_1\,t}$$

U ovom izrazu kompleksnu amplitudu harmonika definišemo kao

$$\underline{S_n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\,n\,\omega_1\,t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}(Q_n - jP_n) & za \quad n > 0 \\ \frac{1}{2}(Q_{-n} + jP_{-n}) & za \quad n < 0 \end{cases}$$

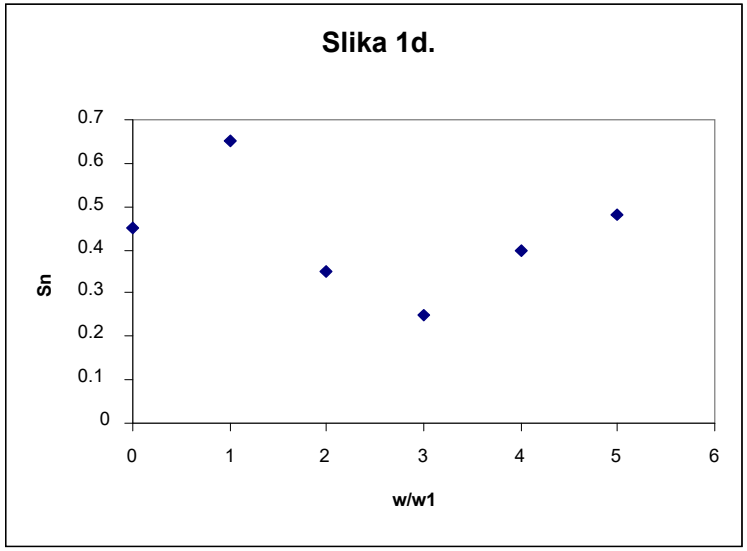
Za ovaj oblik Furijeovog reda važi $\underline{S_n} = S_n\, e^{j\,\varphi_n}$

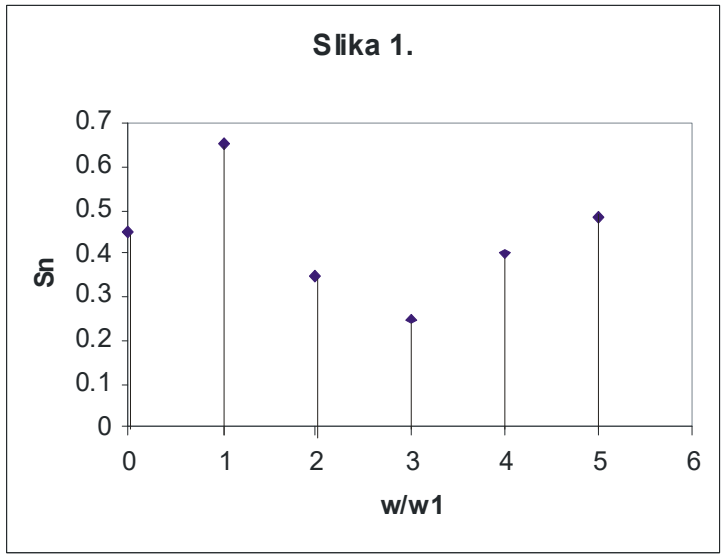
gde je S_n amplituda, a φ_n faza n-tog harmonika Furijeovog reda.

Često je prilikom rešavanja praktičnih zadataka, a naročito kada je potrebno da se tokom rada vrše operacije diferenciranja i integraljenja, mnogo zgodnije da se koristi kompleksni oblik Furijeovog reda, nego prva dva trigonometrijska oblika.

- Skup veličina S_n ili Q_n i P_n naziva se amplitudski spektar, a skup veličina φ_n naziva se fazni spektar posmatranog signala i ova dva spektra potpuno karakterišu dati signal.
- Pošto se češće koristi samo amplitudski spektar, to ćemo njega prosto zvati spektar.
- Spektar periodične funkcije može se grafički predstaviti kao zavisnost amplitude (S_n ili Q_n i P_n) odnosno faze (φ_n) od kružne učestanosti, tj. harmonika osnovne kružne učestanosti- $n\omega_1$

- U ovom koordinatnom sistemu spektar je predstavljen skupom diskretnih tačaka gde svakoj vrednosti $n\omega_1$ odgovara samo jedna vrednost S_n. Ovakav spektar je predstavljen na slici 1d., ali pošto nije praktičan za rad, usvojeno je da se amplitude pojedinih harmonika, predstavljaju u određenoj razmeri, odsečcima normala iz tačaka diskretnog spektra na osu učestanosti, te ovako modifikovani spektar ima oblik kao na slici 1.





- Potpuna analogija važi i za fazne spektre.
- Važno je uočiti da za razne oblike Furijeovog reda amplituda jednosmernog člana u svim tim različitim oblicima ima istu vrednost i da su svi oblici reda međusobno povezani, te se lako može prelaziti sa jednog oblika na drugi.
- Amplituda svake spektralne komponente trigonometrijskog oblika Furijeovog reda, čija je učestanost $n\omega_1$ u stvari predstavlja zbir amplituda komponenti čije su učestanosti $-n\omega_1$ i $n\omega_1$

iz kompleksnog oblika Furijeovog reda. U kompleksnom spektralnom domenu, dakle važi da je amplitudski spektar parna funkcija učestanosti, a fazni neparna funkcija učestanosti.

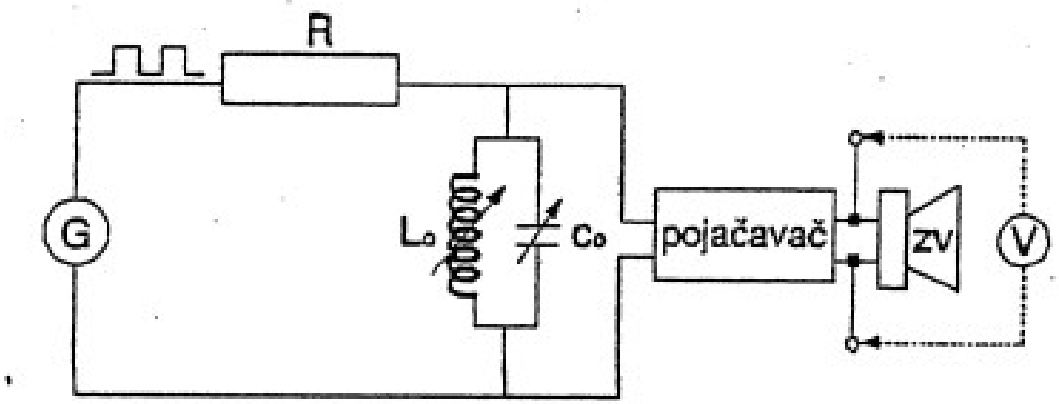
- Razlaganje pojedinih funkcija u Furijeove redove može da se znatno uprosti ako imamo u vidu sledeće osobine funkcije $s(t)$:
  - Ako je $s(t)$ funkcija koja ima iste površine ispod i iznad apscisne ose, onda je jednosmerni član jednak nuli $\frac{a_0}{2}=0$
  - Ako je $s(t)$ parna funkcija, $s(t)=s(-t)$, onda imamo samo harmonike kosinusoidalnog oblika → $P_n=0$.
  - Ako je $s(t)$ neparna funkcija, $s(t)=-s(-t)$, onda Furijeov red sadrži samo sinusoidalne komponente → $Q_n=0$
  - Ako je $s(t)$ simetrična funkcija u odnosu na apscisnu osu ako izmenimo mesto njenim dvema poluperiodama, tj.

$s(t)=-s(t+T/2)$ onda Furijeov red ima samo neparne harmonike.

- Pri rastavljanju funkcija u Furijeove redove moramo imati na umu:
  - Da je potrebno da funkciju posmatramo u intervalu od jedne cele periode, pri čemu ovaj interval može da se uzme počev od bilo koje tačke na apscisi.
  - Da pri određivanju amplituda harmonika parnih ili neparnih funkcija dovoljno da funkciju posmatramo u intervalu od samo jedne poluperiode.
  - Da pomeranje apscise gore-dole duž ordinatne ose menja samo jednu komponentu i to jednosmernu komponentu.
  - Da pomeranje ordinatne ose levo desno utiče samo na fazu harmonika.



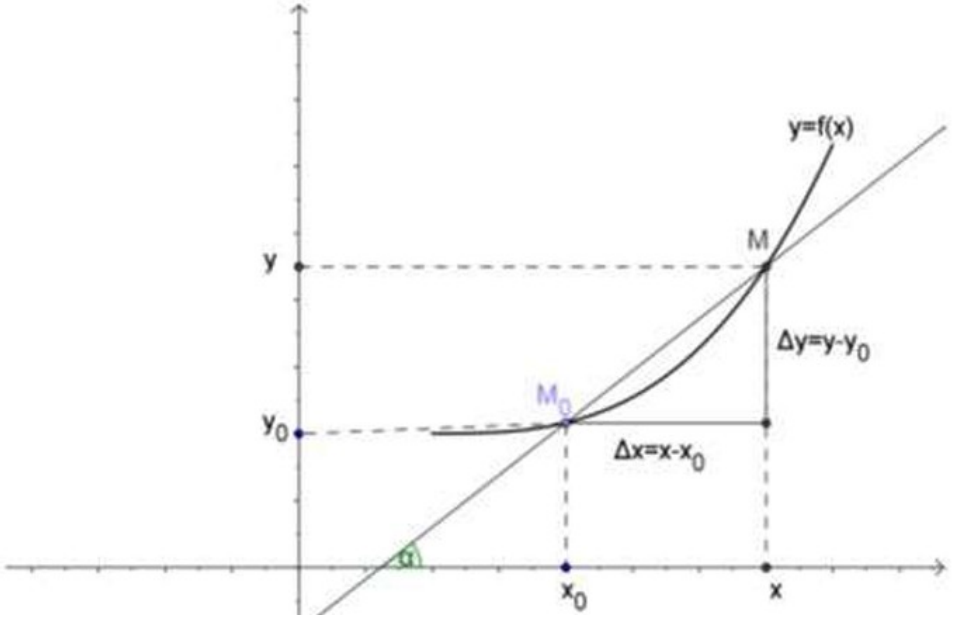
Praktična provera razlaganja signala na spektralne komponente mogla bi se lako izvesti po šemi kao na slici. Podešavanjem oscilatornog kola na harmonične učestanosti analiziranog signala, koji se generiše generatorom G, možemo na sluh proceniti koji harmonici su prisutni u spektru.



Slika. Šema za praktičnu proveru postojanja harmonika u spektru povorke impulsa

I izvod funkcije

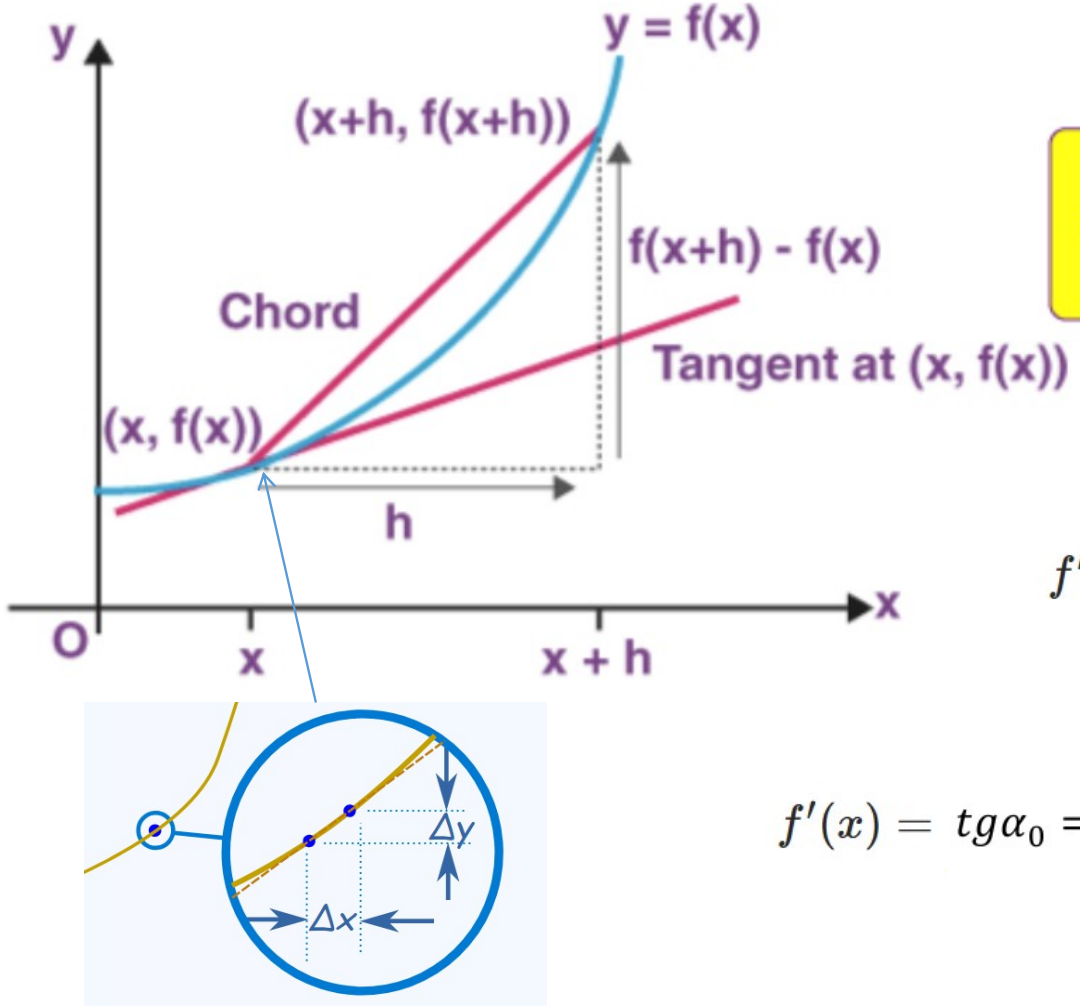
$$k = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$



$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

$$k = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

I izvod funkcije



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = tg\alpha_0 = k_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

I izvod funkcije

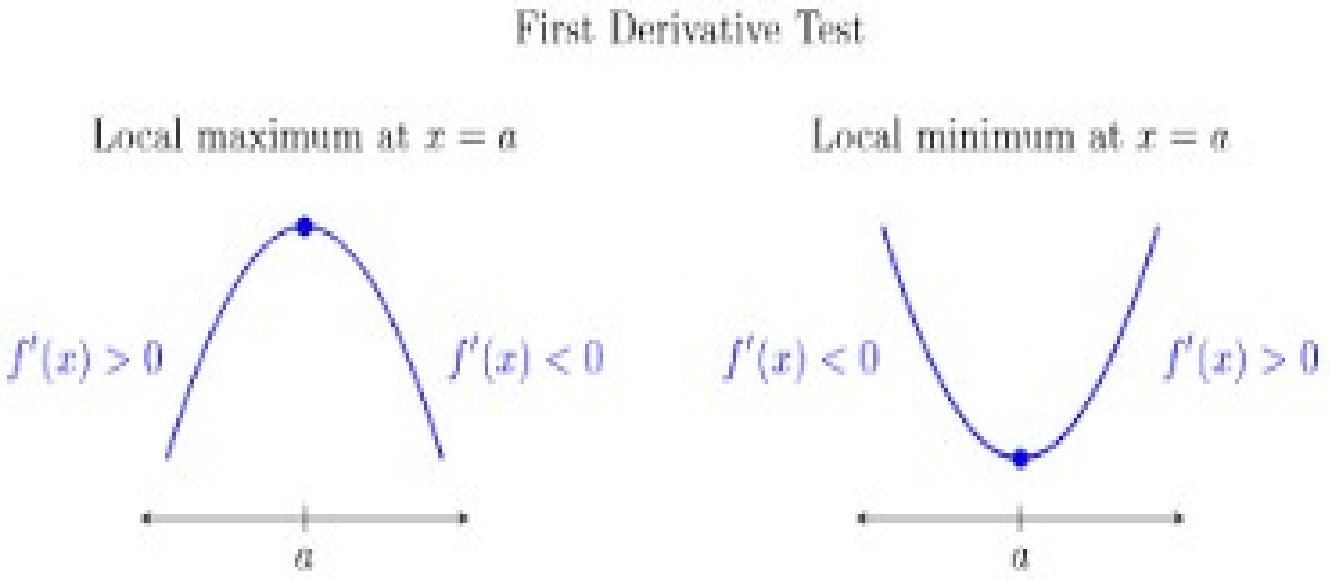
Funkcija	Izvod funkcije
$y = c, (c = const.)$	$y' = 0$
$y = x^{\alpha}, (\alpha \in R)$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Funkcija	Izvod funkcije
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$	
$(f(x)\bullet g(x))' = f'(x)\bullet g(x)+g'(x)\bullet f(x)$	
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\bullet g(x)-g'(x)\bullet f(x)}{g^2(x)}$	

I izvod funkcije

Rules	Function	Derivative
Multiplication by constant	cf	cf'
Power Rule	x^n	nx^{n-1}
Sum Rule	$f + g$	$f' + g'$
Difference Rule	$f - g$	$f' - g'$
Product Rule	fg	$f\,g' + f'\,g$
Quotient Rule	f/g	$\frac{f'\,g - g'\,f}{g^2}$
Reciprocal Rule	$1/f$	$-f'/f^2$
Chain Rule (using ′)	$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

I izvod funkcije



I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije $f(x) = x^3$.

I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije $f(x) = x^3$.

Koristi se pravilo za izvod stepene funkcije pri cemu se uzima n=3:

$$f'(x^n) = nx^{n-1}$$

$$f'(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Dakle prvi izvod funkcije x^3 je $3x^2$)

I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije $f(x) = 1/x$.

I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije f(x) = 1/x.

Kako je:

f(x) = 1/x = x^{-1}

Koristi se pravilo za izvod stepene funkcije pri cemu se uzima n=-1:

$$f'(x^n) = nx^{n-1}$$

$$f'(1/x) = f'(x^{-1}) = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Dakle prvi izvod funkcije 1/x je $-x^{-2}$)

I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije $f(x) = 5x^3$.

I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije $f(x) = 5x^3$.

Koristi se pravilo za za izvod proizvoda konstante i funkcije i za izvod stepene funkcije pri cemu se uzima n=3:

$$f'(cf(x)) = cf(x)$$

$$f'(x^n) = nx^{n-1}$$

$$f'(5x^3) = 5f'(x^3) = 5*3x^{3-1} = 15x^2$$

Dakle prvi izvod funkcije $5x^3$ je $15x^2$)

I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije $f(x) = x^2 + x^3$.

I izvod funkcije

Primer: odrediti prvi izvod funkcije $f(x) = x^2 + x^3$.

Koristi se pravilo f + g = f’ + g’:

$$f'(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$$
$$f'(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

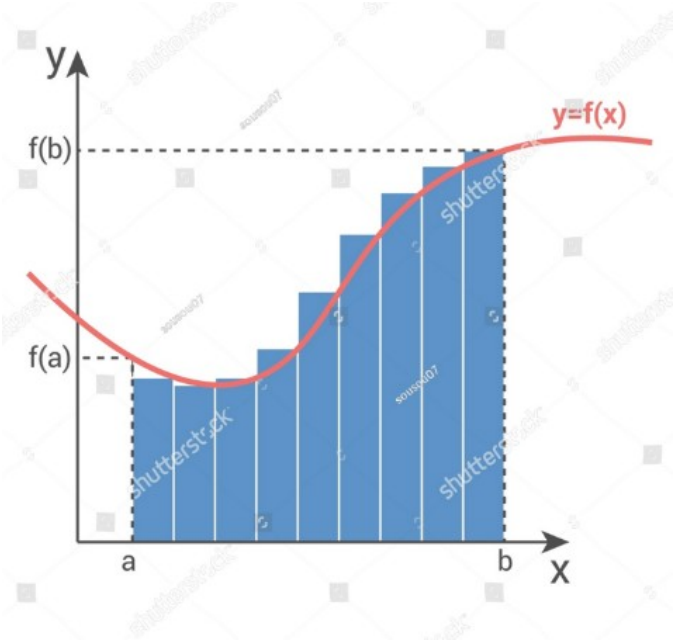
$$f'(x^2 + x^3) = f'(x^2) + f'(x^3) = 2x + 3x^2$$

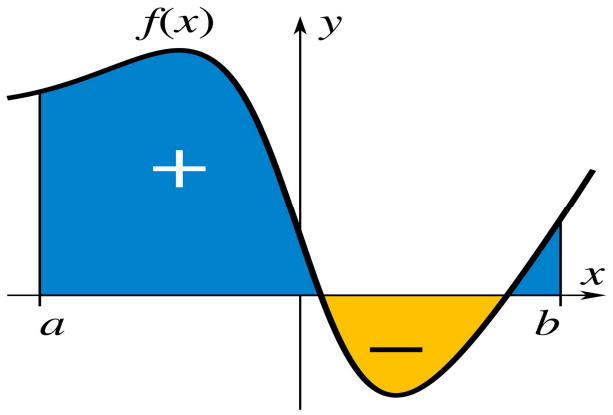
Dakle prvi izvod funkcije $x^2 + x^3$ je $2x + 3x^2$)

Integral funkcije

$\int f(x)\,dx,$ Neodredjeni integral

$\int_a^b f(x)\,dx.$ Odredjeni integral





Integral funkcije

Elementary formulas

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$	$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x\rvert) + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert\right) + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln\left(\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert\right) + C$
$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$	$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
Here a and n are constants,	and C is an arbitrary constant.

Properties of definite integrals	
1. Multiplication by a constant (k = constant)	$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
2. Negation	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. Decomposition $a < c < b$	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
4. Addition	$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
5. Zero integral	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
Parna funkcija	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
Neparna funkcija	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Integral funkcije

Metod smene

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Metod parcijalne integracije

$$\int u\,dv \;=\; uv - \int v\,du.$$

Ojlerove formule

$$\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Integral funkcije

1.Izracunati integral:

$$\int_{1}^{2} 2x dx$$

Integral funkcije

1.Izracunati integral:

$$\int_1^2 2x dx$$

Na osnovu pravila za integraciju dobija se:

$$\int 2x\,dx = x2 + C$$

I racunaju se rezultati za svaku od granica

za x=1: ∫2x dx = 1^2 + C
za x=2: ∫2x dx = 2^2 + C

I oduzme se rezultat za gornju granicu od rezultata za donju granicu:
(22 + C) − (12 + C) = 4 -1 = 3

SPEKTRALNA ANALIZA APERIODIČNIH SIGNALA

- Umesto razlaganja signala Furijeovim redom vrsi se Furijeova transformacija nad aperiodicnim signalom.
- Furijeova transformacija (FT):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S(j\omega) = |S(j\omega)|\, e^{j\theta}$$

- Inverzna Furijeova transformacija (IFT):

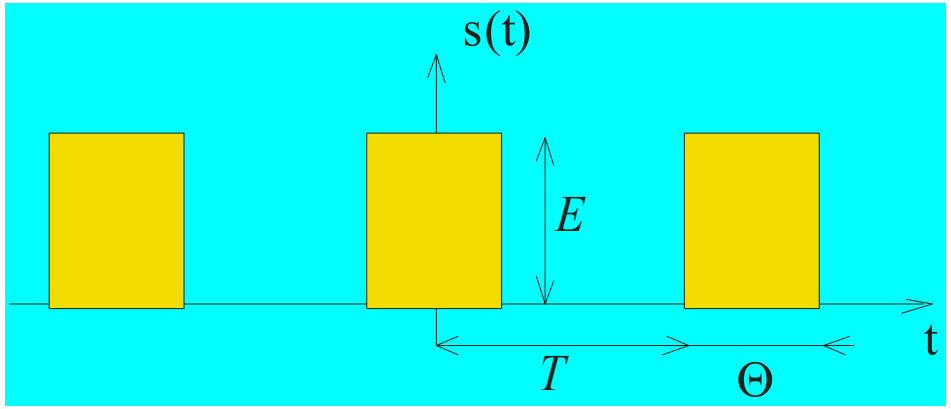
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Spektralna gustina amplituda $|S(j\omega)|$ i spektralna gustina faza $\theta(\omega)$ (nekad $\phi(\omega)$) su pandan amplitudskom i faznom spektru kod razlaganja signala u Furijeov red.

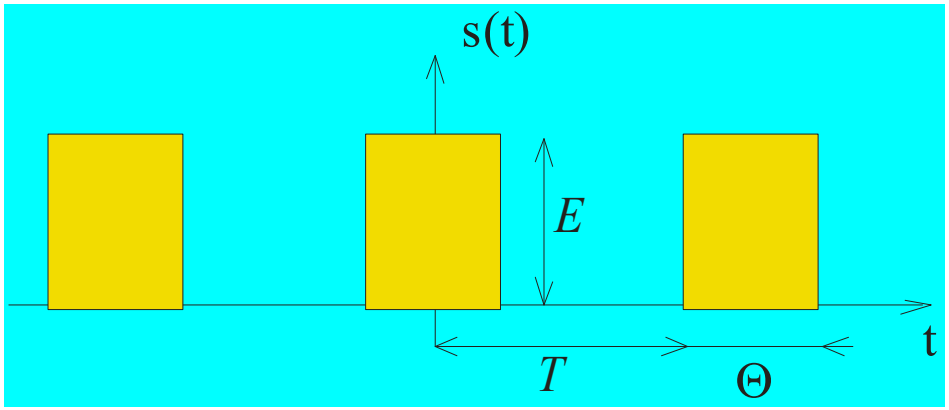
- Spektralna gustina amplituda i faza su važni koncepti u analizi signala i spektroskopiji. Evo kako ih možemo razumeti:
- Spektralna gustina amplituda:
  - Spektralna gustina amplituda (označena kao $|S(j\omega)|$) opisuje kako se amplituda signala menja u zavisnosti od frekvencije.
  - Za periodične signale, spektralna gustina amplituda prikazuje prisutnost različitih harmonika (komponenti) u spektru.
  - Na primer, ako imamo periodični signal, njegov spektar će sadržavati više komponenti sa različitim amplitudama.
  - Spektralna gustina amplituda je korisna za razumevanje frekvencijske strukture signala.
- Spektralna gustina faza:
  - Spektralna gustina faza (označena kao $\phi(\omega)$ ili $\theta(\omega)$) opisuje fazu svake komponente u spektru.
  - Faza se meri u radijanima i govori nam koliko je svaka komponenta pomaknuta u odnosu na referentnu fazu (obično nosioc signala).
  - Faza je važna za razumevanje vremenskih relacija između različitih komponenti signala.
  - Na primer, u faznoj modulaciji, promena faze nosioca signala utiče na fazu modulirane komponente.
- Ukratko, spektralna gustina amplituda i faza omogućava nam da razumemo kako se signal sastoji od različitih frekvencijskih komponenti i kako su te komponente međusobno povezane.

- Podela signala po ponovljivosti u vremenu - objasniti i navesti primere.
- Podela signala po kontinuitetu u vremenu - objasniti i navesti primere.
- Blok šema telekomunikacija (objasniti)
- Kada se koriste Furijeovi redovi a kada furijeova transformacija? Napisati obrasce. Dati primere
- Nacrtati blok šemu za proveru harmonika u spektru povorke impulsa

- **Zadatak 1.** Povorku pravougaonih impulsa proizvoljnog trajanja i proizvoljne učestanosti, razviti u Furijeov red, posmatrajući je kao parnu funkciju vremena. Naci prva 3 clana reda za slucaj Θ = T/2 I predstaviti graficki Amplitudski spektar.



- **Zadatak 1.** Povorku pravougaonih impulsa proizvoljnog trajanja i proizvoljne učestanosti, razviti u Furijeov red, posmatrajući je kao parnu funkciju vremena.Naci prva 3 clana reda za slucaj Θ = T/2 I predstaviti graficki Amplitudski spektar.



- Prvo se graficki predstavi ovaj niz impulsa, gde je ***E***-amplituda impulsa, **θ**-trajanje impulsa, a ***T***-perioda ponavljanja impulsa.
- Definišimo najpre ovu funkciju. Pošto je funkcija parna, možemo da se zadovoljimo definisanjem samo u intervalu od jedne polovine periode. Dakle, imamo:

$$s(t)=\begin{cases} E & za \quad 0<t<\theta/2 \\ 0 & za \quad \theta/2<t<T/2 \end{cases}$$

- Opšti oblik Furijeovog reda glasi:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin n\omega_1 t$$

gde je: $S_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$

srednja vrednost funkcije, a ostali članovi su:

$$Qn = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos n\omega_1 t\, dt \qquad Pn = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin n\omega_1 t\, dt$$

Iz izraza za član Q_n dobijamo za $n = 0$ da je $Q_0 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt = 2S_0$

Sada je izraz za Furijeov red: $s(t) = \frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin n\omega_1 t$

U našem slučaju imamo da je

$$Q_0 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{4E}{T}\int_0^{\theta/2} dt = \frac{4E}{T}\frac{\theta}{2} = 2E\frac{\theta}{T} = 2\alpha E$$

- Parametar $\alpha = \theta / T$ faktor režima i on definiše relativnu širinu impulsa u odnosu na periodu ponavljanja impusa u periodičnoj povorci impulsa. Za parnu funkciju imamo da je

$$Qn = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} s(t)\cos n\omega_1 t\, dt \qquad \wedge \qquad P_n = 0$$

pa je

$$Q_n = \frac{4}{T}\int_0^{\theta/2} E\cos n\omega_1 t\, dt = \frac{4E}{T}\int_0^{\theta/2}\cos n\omega_1 t\, dt = \frac{4E}{T}\left[\frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}\right]_0^{\theta/2} =$$

$$= \frac{4E}{T}\,\frac{\sin n\omega_1 \frac{\theta}{2}}{n\omega_1} = \frac{4E}{T}\,\frac{\sin n2\pi f_1 \frac{\theta}{2}}{n2\pi f_1}$$

Imajući u vidu da je $f\theta = \frac{\theta}{T} = \alpha$ i $T f = 1$, možemo pisati

$$Q_n = 2E\,\frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi} = 2\alpha E\,\frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha}$$

- Konačni oblik trigonometrijskog oblika Furijeovog razvoja za parnu funkciju povorke pravougaonih impulsa je:

$$s(t) = \alpha E + 2\alpha E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha\pi}{n\alpha\pi} \cos n\,\omega_1 t \right)$$

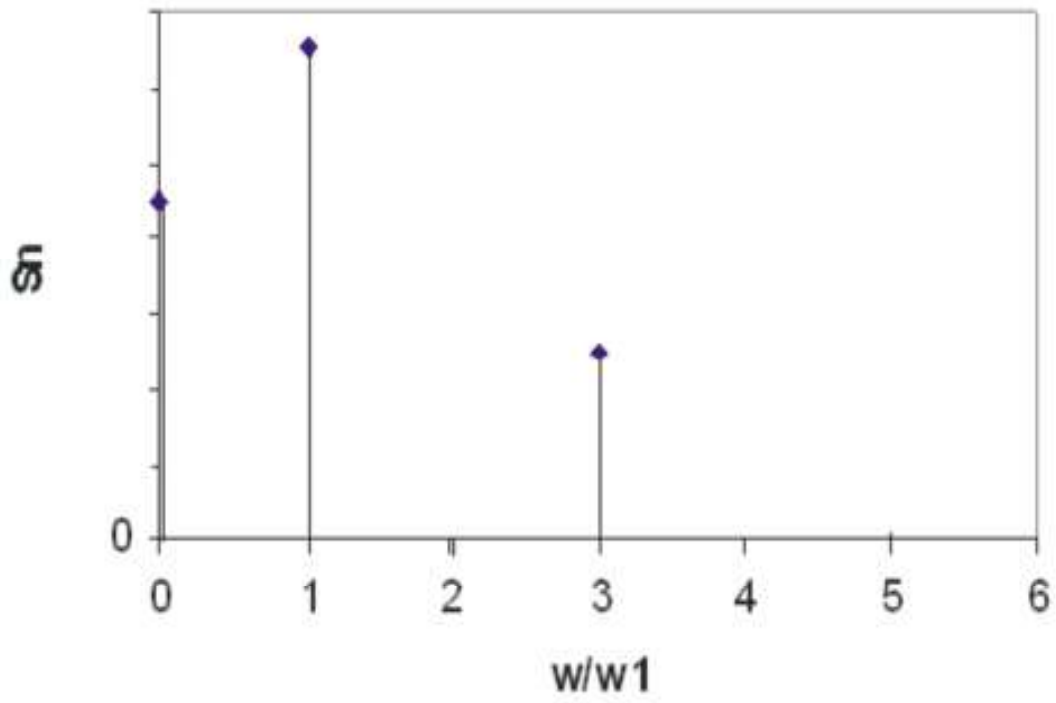
- Iz ovog izraza koji ustvari predstavlja Furijeov niz za povorku pravougaonih impulsa proizvoljnog trajanja, stavljajući $\alpha = 0.5$ dobijamo izraz za povorku pravougaonih impulsa specijalnog oblika, kod koje impuls traje isto koliko i pauza (kvadratni impulsi):

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \cos n\,\omega_1 t \right)$$

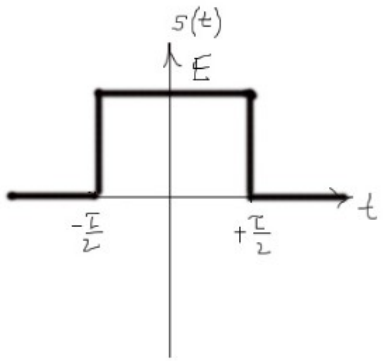
čiji je razvijeni oblik sledeći

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + ... \right)$$

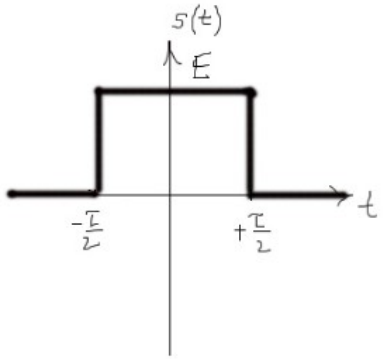
Ovaj izraz sadrži samo neparne harmonike, što smo i ranije mogli da zaključimo, jer je naš signal zadovoljavao uslove slikovne simetrije, te onda imamo samo neparne harmonike u Furijeovom nizu.


Sn
0
0
1
2
3
4
5
6
w/w1

Zadatak 2. Pronaći i nacrtati spektralnu gustinu amplituda i faza signala opisanog funkcijom na slici:



Zadatak 2. Pronaći i nacrtati spektralnu gustinu amplituda i faza signala opisanog funkcijom na slici:



$$s(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau/2 \\ E, & -\frac{\tau}{2} < t < +\tau/2 \\ 0, & +\frac{\tau}{2} < t < +\infty \end{cases}$$

Rešenje:

Spektar aperiodičnih siganala anliziramo pomoću Furijeove transformacije:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$|F(j\omega)|$ naziva se spektralnom gustinom amplituda, a $\theta(\omega)$ spektralnom gustinom faza.

Za dati signal:

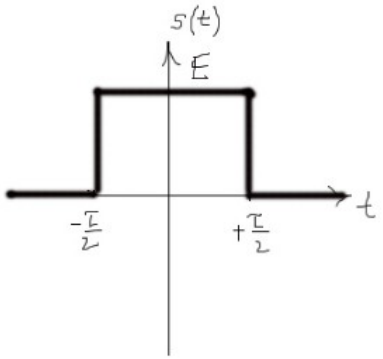
$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathrm{E}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{dt} = 2\mathrm{E}\int_{0}^{\infty} \cos\omega\mathrm{tdt} = \mathrm{E}\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Spektralne gustine amplituda i faza ovog signala su:

$$|F(j\omega)| = E\tau\left|\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right|$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \dfrac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} > 0 \\ \pm\pi, & \dfrac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} < 0 \end{cases}$$

Rešenje:



Furijeova transformacija aperiodičnog signala

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Spektar signala s(t)

$$S(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \left| \begin{array}{l} x = -j\omega t \\ dx = -j\omega dt \\ dt = -\frac{dx}{j\omega} \\ +\frac{\tau}{2} : -j\omega\frac{\tau}{2} \\ -\frac{\tau}{2} : j\omega\frac{\tau}{2} \end{array} \right| = E \cdot \int_{j\omega\frac{\tau}{2}}^{-j\omega\frac{\tau}{2}} e^{x} \cdot \frac{dx}{-j\omega} = \frac{E}{-j\omega} \int_{j\omega\frac{\tau}{2}}^{-j\omega\frac{\tau}{2}} e^{x} dx = \frac{E}{-j\omega} \cdot e^{x} \Big|_{j\omega\frac{\tau}{2}}^{-j\omega\frac{\tau}{2}} = \frac{E}{-j\omega} \left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau}{2}} \right) = \ldots$$

$$= \frac{E}{j\omega}\left(e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\right) = \left(\frac{E}{j\omega} \cdot 2j \cdot \sin\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \frac{\tau}{\tau} = E\cdot\tau \cdot \frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\cdot\tau}{2}}$$

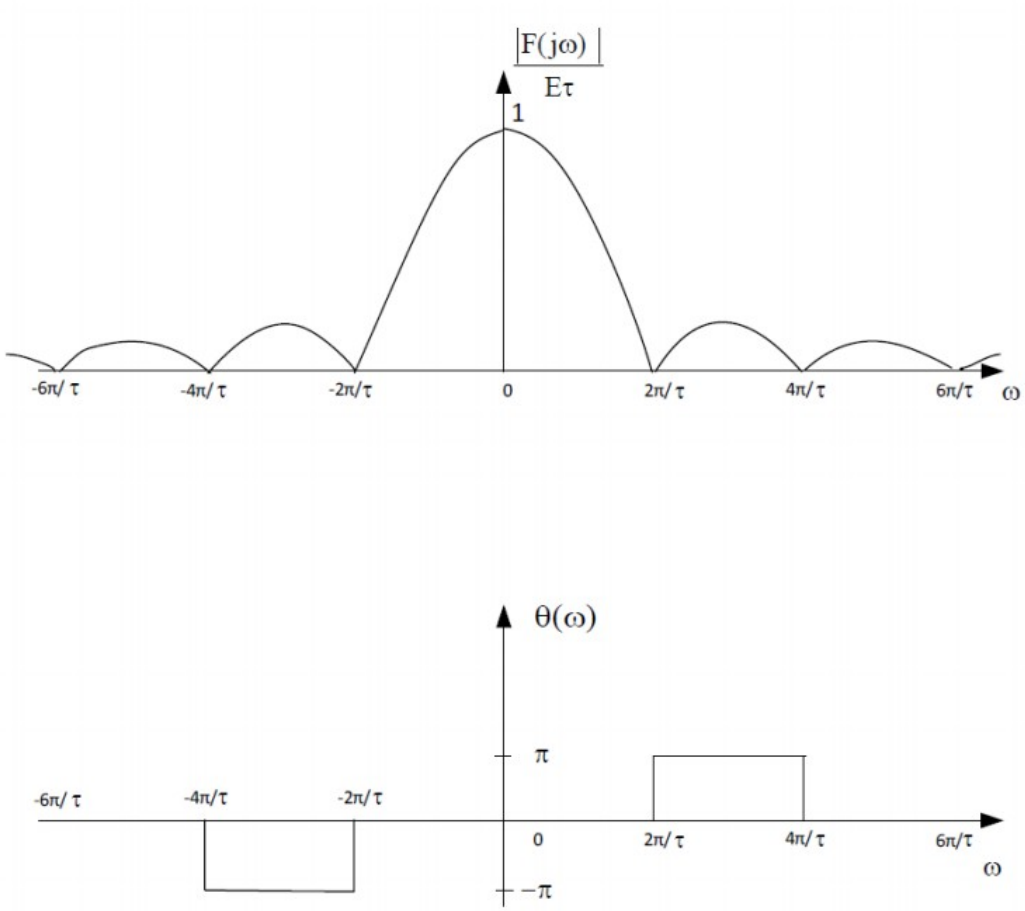
$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \qquad j = \sqrt{-1}\ ,\ j = \frac{1}{-j}$$

NULE: $\frac{\omega\tau}{2} = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$

$$\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$$

$$\Theta(\omega) = \Delta\Theta(\omega)$$

$$\Delta\Theta(\omega) = \begin{cases} 0 & , \frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \geq 0 \\ \pi & , \frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} < 0 \end{cases}$$



Slika 1. Spektralna gustina amplutda (gore) i spektralna gustina faza (dolje) signala f(t).

Linearni sistemi

Linearni sistem je sistem koji ne menja strukturu signala, već ga samo skalira, pomera ili filtrira.

Linearni sistemi u telekomunikacijama imaju siroku primenu.

Konkretni, realni uređaji koji se koriste a koji se u svom radnom opsegu mogu predstaviti kao linearni sistemi:

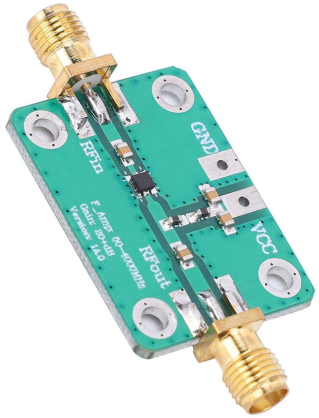
1. Pojačavač (Amplifier)

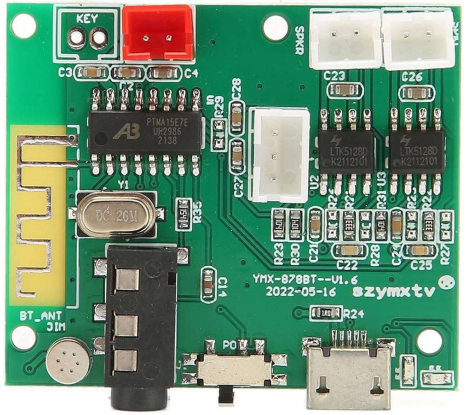
Pojačava signal (linearan je samo dok ne uđe u zasićenje):

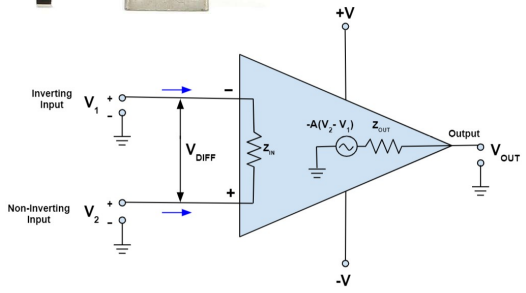
$y(t)=A \cdot x(t)$

Primeri:

- audio pojačavač (zvučnici)
- RF pojačavač u baznoj stanici
- operacioni pojačavač (op-amp)







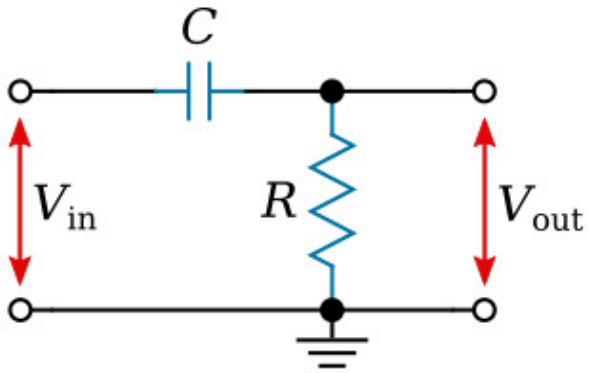
Linearni sistemi

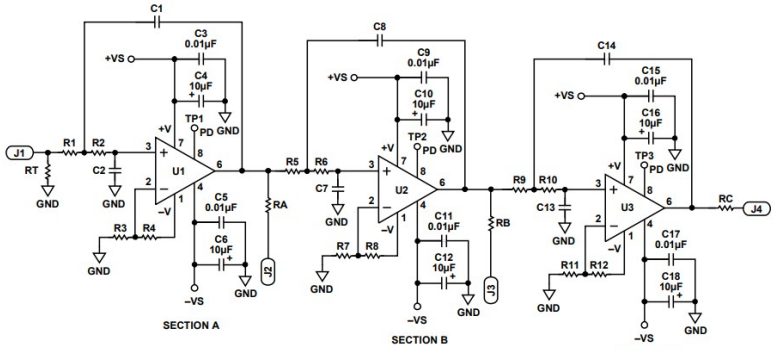
2. Filter (nisko-propusni (Low-pass), visoko-propusni (High-pass), propusnik opsega (band - pass) ...)

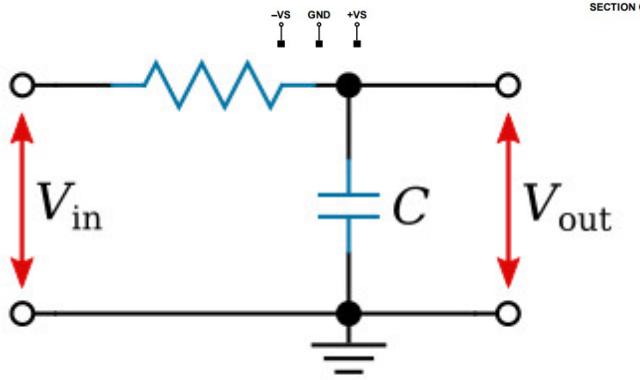
Menja spektar signala (uklanja određene frekvencije) pri cemu ne stvara nove frekvencije (idealni model filtra)

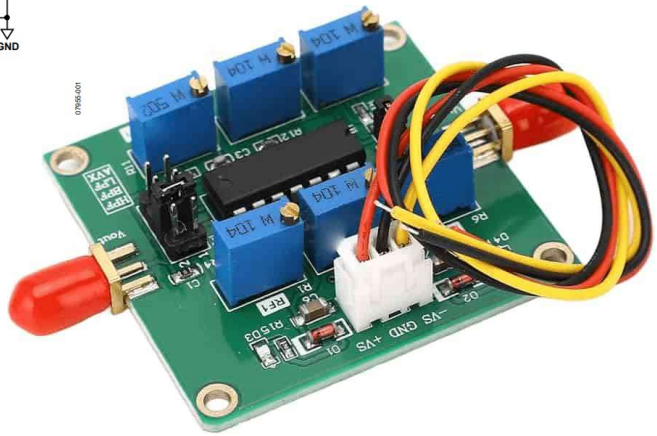
Primeri:

- audio filter u zvučnicima
- RF filter u mobilnim telefonima
- anti-aliasing filter









Linearni sistemi

3. AD/DA konverter (idealni model)

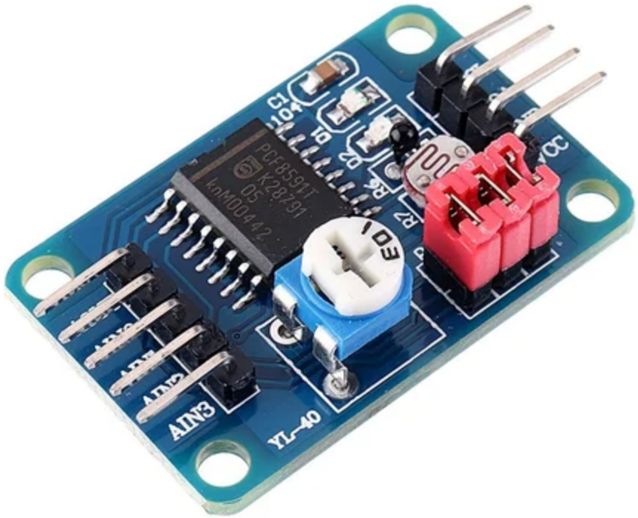
- ADC: analogni signal → digitalni signal
- DAC: digitalni signal → analogni signal

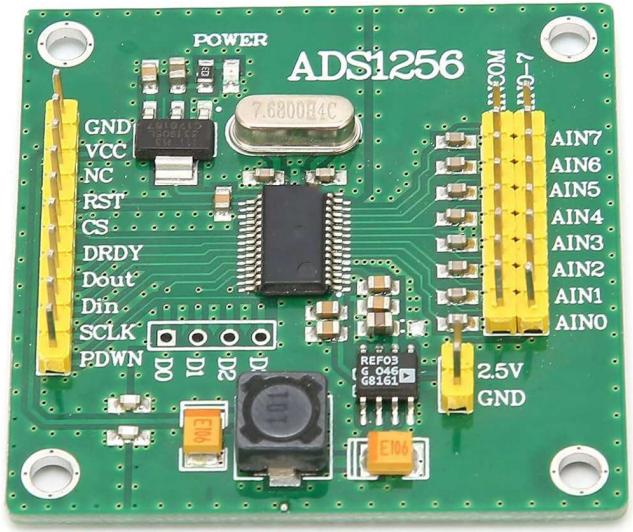
Idealni model je linearan jer:

- postoji proporcionalnost ulaza i izlaza
- postoji očuvanje oblika signala

U praksi postoji kvantizacija zbog cega nije savršeno linearan ali se u pojedinim slucajevima moze aproksimirati lineranim modelom.



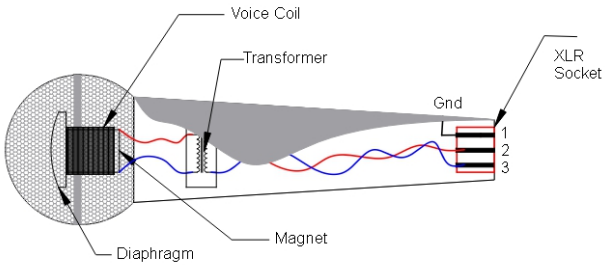


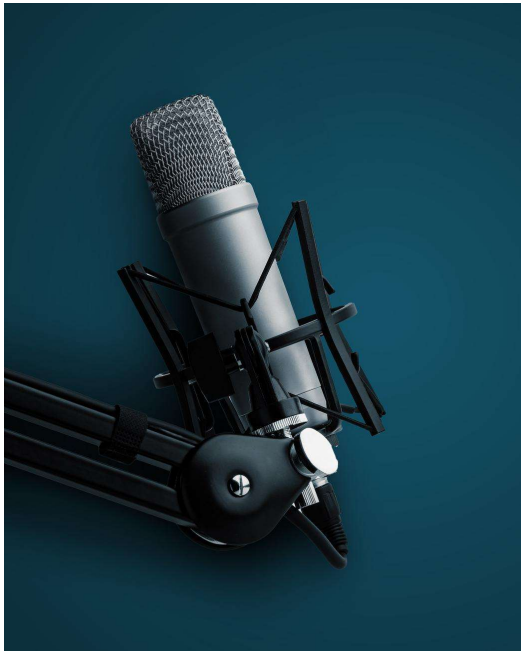


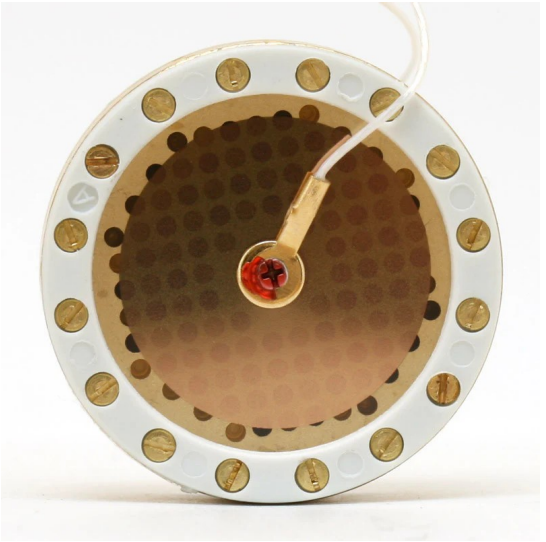
Linearni sistemi

4. Mikrofon (u linearnom režimu)

Pretvara zvuk u električni signal. Linearan je pri mlaim amplitudama, pri velikim amplitudama ulaznog signala gubi lineranost.





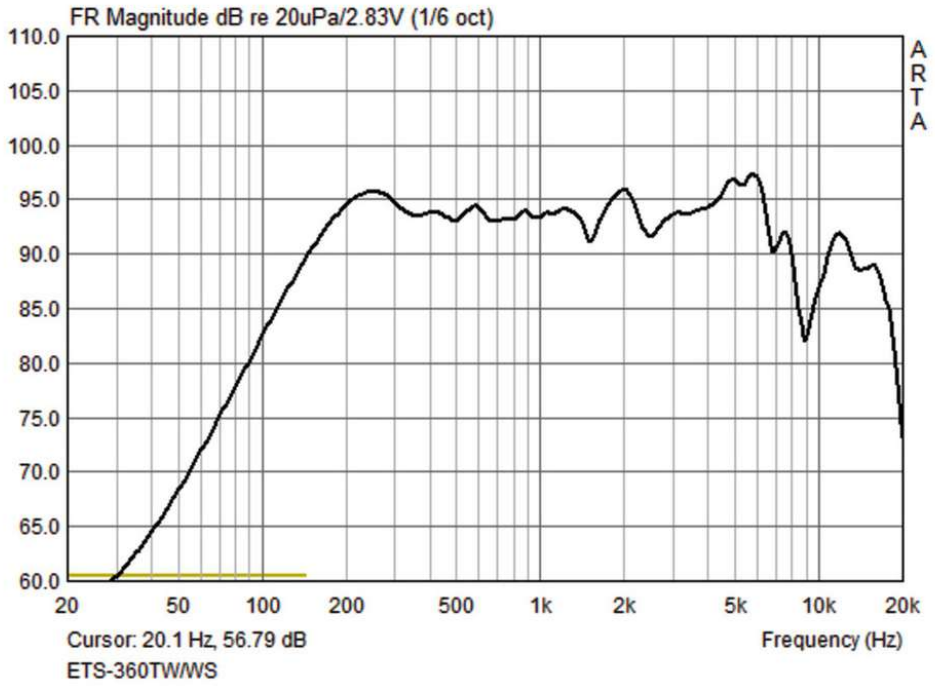


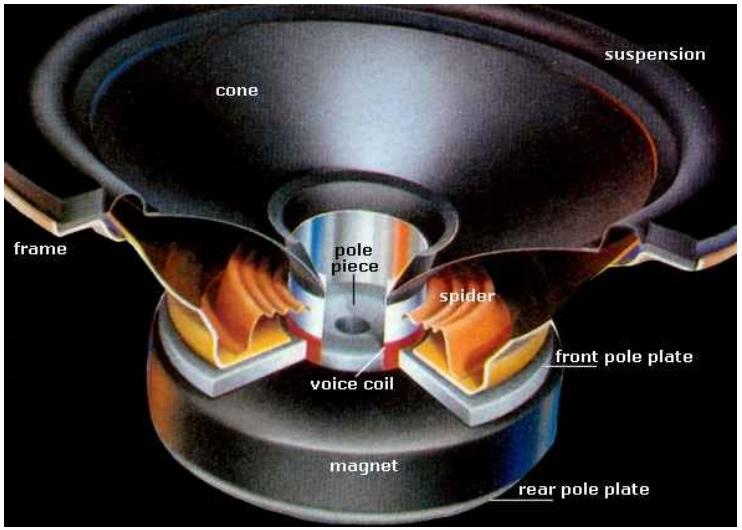
Linearni sistemi

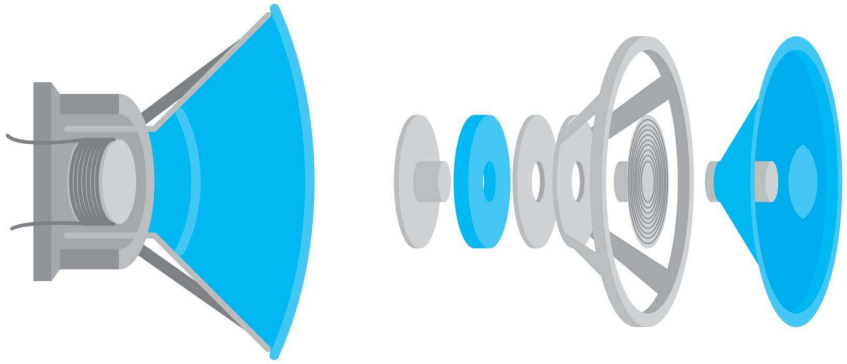
5. Zvučnik (u linearnom režimu)

Pretvara električni signal u zvuk.

Deo frekventne karakteristike se moze aproksimirati lineranom.





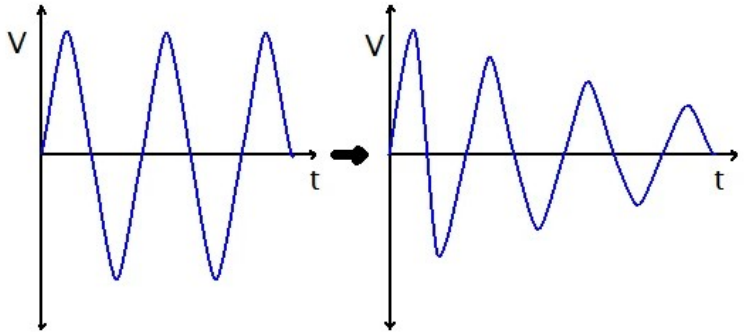


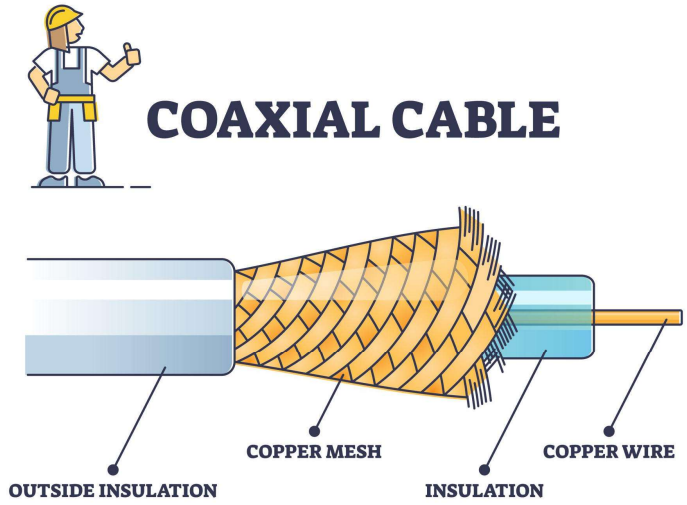
Linearni sistemi

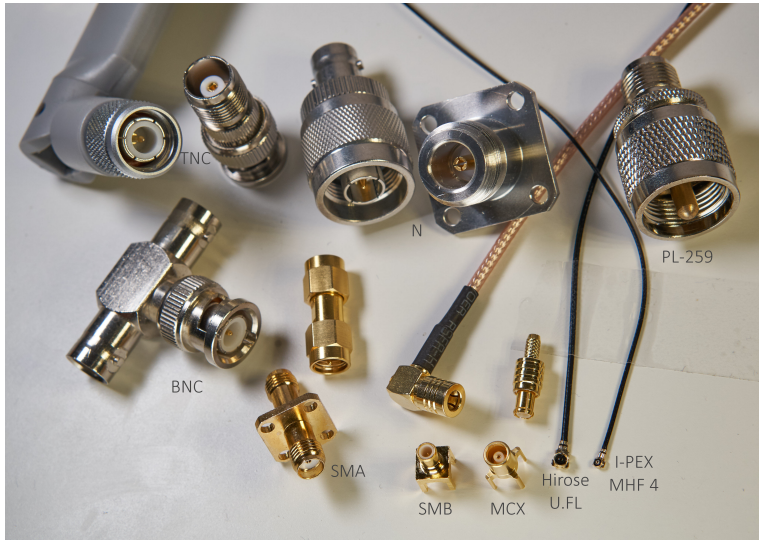
6. Koaksijalni kabl (u linearnom režimu)

Prenosi signal od tačke A do tačke B.

Unosi slabljenje i kašnjenje ali se moze aproksimirati linearnim modelom.







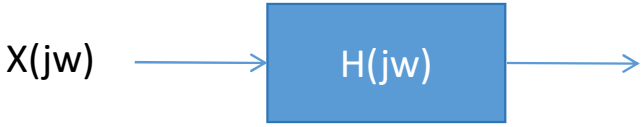
Linearni sistemi

Prenosna funkcija sistema predstavlja odnos izlaznog i ulaznog signala. Ako su signali u vremenskom domenu onda je prenosna funkacija sistema:



$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Ukoliko su dati signali u frekventnom domenu onda je prenosna funkacija sistema:



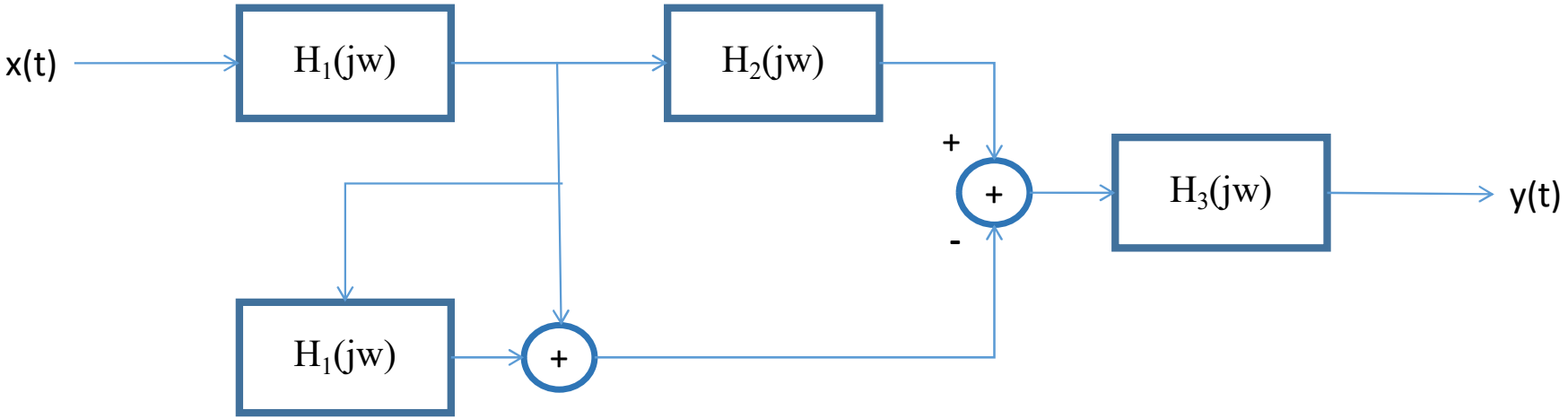
$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)}$$

Linearni sistemi

1. Na slici je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih sklopova su:

$H_1(jw) = e^{-jw}$; $H_2(jw) = \frac{1}{jw}$; $H_3(jw) = jw$

Odrediti prenosnu funkciju ovog sistema.



Zadatak 1. Na slici 1. je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih sklopova su:

$$H_1(j\omega) = e^{-j\omega} \qquad H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \qquad H_3(j\omega) = j\omega$$

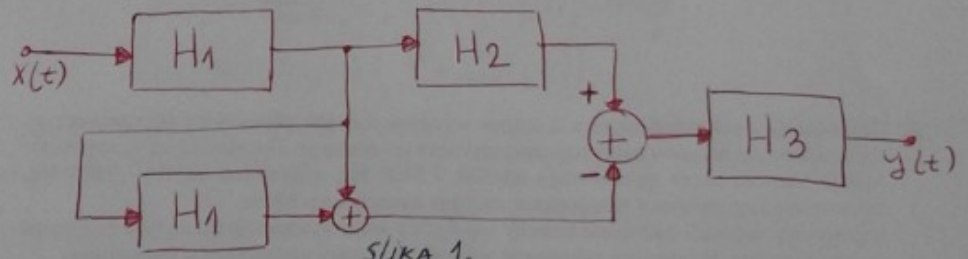
a) Odrediti prenosnu funkciju ovog sistema

b) Ako na ulazu sistema deluje impuls

$$x(t) = \begin{cases} t, & |t| \le 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

skicirati signal na izlazu sistema.

c) Odrediti vrednost izlaznog signala u trenutku $t = 2.75$.



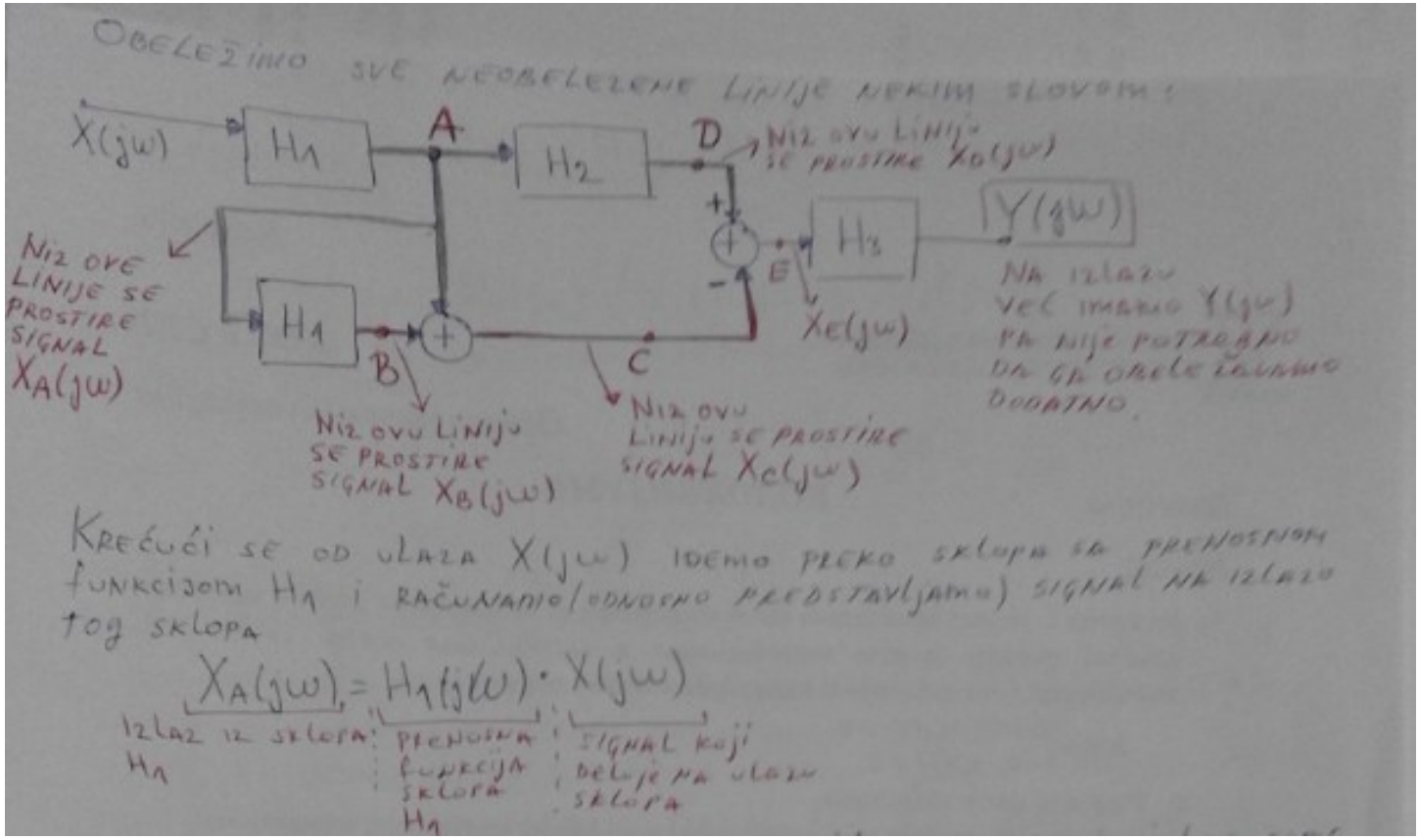
Slika 1.

Rešenje:

a) Potrebno je da nađemo prenosnu funkciju sistema, tj. odnos signala na izlazu i signala na ulazu. Prenosnu funkciju ćemo izraziti u domenu učestanosti:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Dakle, potrebno je da krenemo od spektra ulaznog signala $X(j\omega)$ - ne posmatramo $x(t)$ kako je dato na slici, već odmah pišemo $X(j\omega)$, i postepeno krećemo ka izlazu $Y(j\omega)$, pri čemu svaku neobeleženu liniju između dva sklopa moramo da obeležimo.



KREĆUĆI SE OD ULAZA $X(j\omega)$ IDEMO PREKO SKLOPA SA PRENOSNOM FUNKCIJOM H_1 I RAČUNAMO (ODNOSNO PREDSTAVLJAMO) SIGNAL NA IZLAZU TOG SKLOPA

$$\underbrace{X_A(j\omega)}_{\text{IZLAZ IZ SKLOPA } H_1} = \underbrace{H_1(j\omega)}_{\text{PRENOSNA FUNKCIJA SKLOPA } H_1} \cdot \underbrace{X(j\omega)}_{\text{SIGNAL KOJI DOLAZI NA ULAZ SKLOPA}}$$

Koristeći istu analogiju tražimo $X_B(j\omega)$ → to je izlaz ovog donjeg sklopa sa prenosnom funkcijom H_1 kada na njegov ulaz deluje signal $X_A(j\omega)$. Dakle:

$$X_B(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot X_A(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_1(j\omega) \cdot X(j\omega) = H_1^2(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

Signal $X_C(j\omega)$ predstavlja zbir signala X_A i X_B:

$$X_C(j\omega) = X_A(j\omega) + X_B(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot X(j\omega) + H_1^2(j\omega) \cdot X(j\omega) =$$

$$= H_1(j\omega) \cdot X(j\omega) \left(1 + H_1(j\omega)\right)$$

Signal $X_D(j\omega)$ predstavlja izlaz iz sklopa sa prenosnom funkcijom $H_2(j\omega)$ kada na ulaz tog sklopa deluje $X_A(j\omega)$:

$$X_D(j\omega) = H_2(j\omega) \cdot X_A(j\omega) = H_2(j\omega) \cdot H_1(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

Signal $X_E(j\omega)$ predstavlja istu sumu signala X_D i X_C pri čemu $X_D(j\omega)$ uzimamo sa pozitivnim predznakom, a $X_C(j\omega)$ uzimamo sa negativnim predznakom kao što je označeno na slici:

$$X_E(j\omega) = X_D(j\omega) - X_C(j\omega) = H_2(j\omega) \cdot H_1(j\omega) \cdot X(j\omega) - H_1(j\omega) X(j\omega) \left(1 + H_1(j\omega)\right) =$$

$$= H_1(j\omega) X(j\omega) \cdot \left(H_2(j\omega) - \left(1 + H_1(j\omega)\right)\right) = H_1(j\omega) \cdot X(j\omega) \left(H_2(j\omega) - 1 - H_1(j\omega)\right)$$

Stižemo i do kraja, tj. signal $Y(j\omega)$ predstavlja izlaz iz sklopa sa prenosnom funkcijom $H_3(j\omega)$ kada na njegov ulaz deluje $X_E(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = H_3(j\omega) \cdot X_E(j\omega) = H_3(j\omega) \cdot H_1(j\omega) \cdot X(j\omega) \left(H_2(j\omega) - 1 - H_1(j\omega)\right)$$

NAJZAD, IZRAZIMO PRENOSNU FUNKCIJU SISTEMA:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{H_3(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot X(j\omega)\cdot\left(H_2(j\omega) - 1 - H_1(j\omega)\right)}{X(j\omega)} =$$

$$= H_3(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot\left(H_2(j\omega) - 1 - H_1(j\omega)\right)$$

SADA MOŽEMO DA ZAMENIMO VREDNOSTI PRENOSNIH FUNKCIJA POJEDINIH SKLOPOVA:

$$H(j\omega) = j\omega\cdot e^{-j\omega}\left(\frac{1}{j\omega} - 1 - e^{-j\omega}\right) = j\omega\cdot e^{-j\omega}\cdot\frac{1}{j\omega} - j\omega e^{-j\omega} - j\omega\cdot e^{-j\omega}\cdot e^{-j\omega} =$$

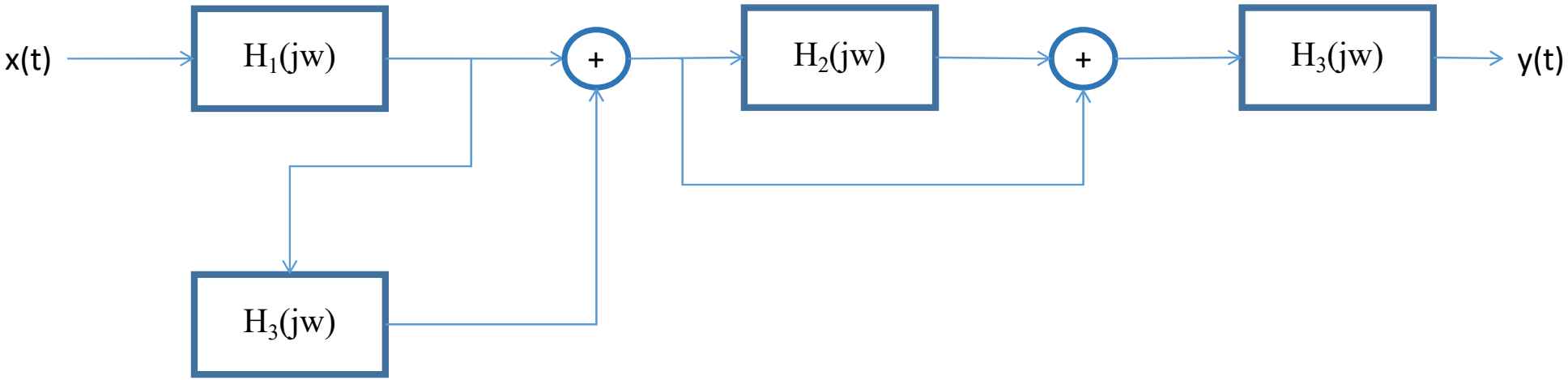
$$= \underline{\underline{e^{-j\omega} - j\omega\cdot e^{-j\omega} - j\omega\cdot e^{-2j\omega}}} \quad \forall t,\ |t| \le 2$$

Linearni sistemi

1. Na slici je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih sklopova su:

$H_1(jw) = \frac{1}{jw}$; $H_2(jw) = e^{-jw}$; $H_3(jw) = jw$

Odrediti prenosnu funkciju ovog sistema.

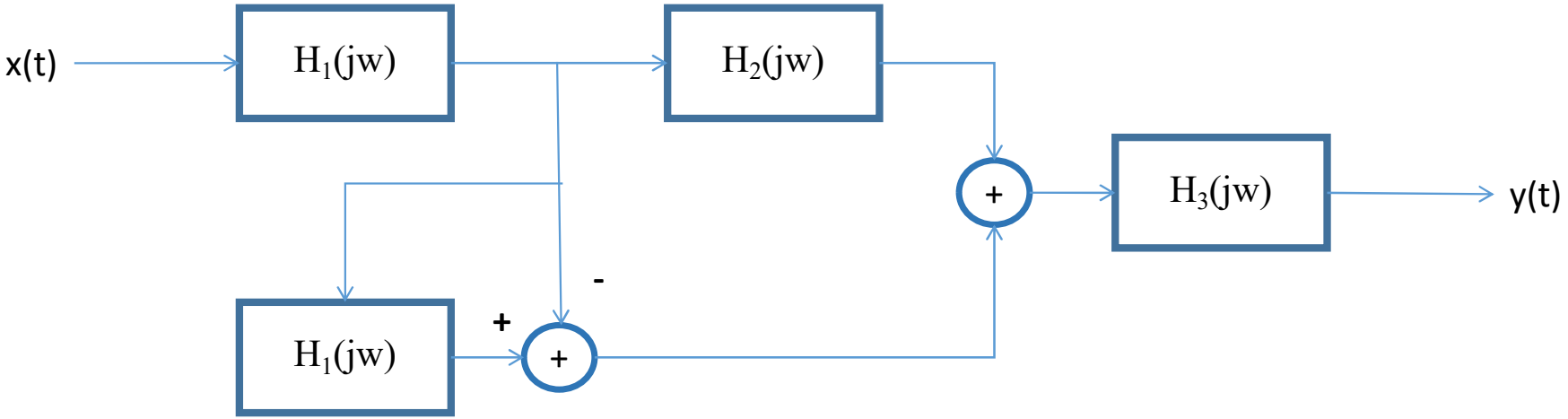


Linearni sistemi

3. Na slici je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih sklopova su:

$H_1(jw) = e^{-j\omega}$; $H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$; $H_3(j\omega) = j\omega$

a) Odrediti prenosnu funkciju ovog sistema.



Linearni sistemi

b) Ako na ulazu ovog sistema deluje impuls:

$$x(t) = \begin{cases} t, & |t| < 2s \\ 0, & |t| > 2s \end{cases}$$

skicirati signal za izlazu sistema.

Koristiti zakonisti, da ako je poznat S(jω) - spektar signala s(t) vazi:

a) spektar signala s1(t) = s(t+T0) je $S_1(j\omega) = e^{j\omega T_0} * S(j\omega)$

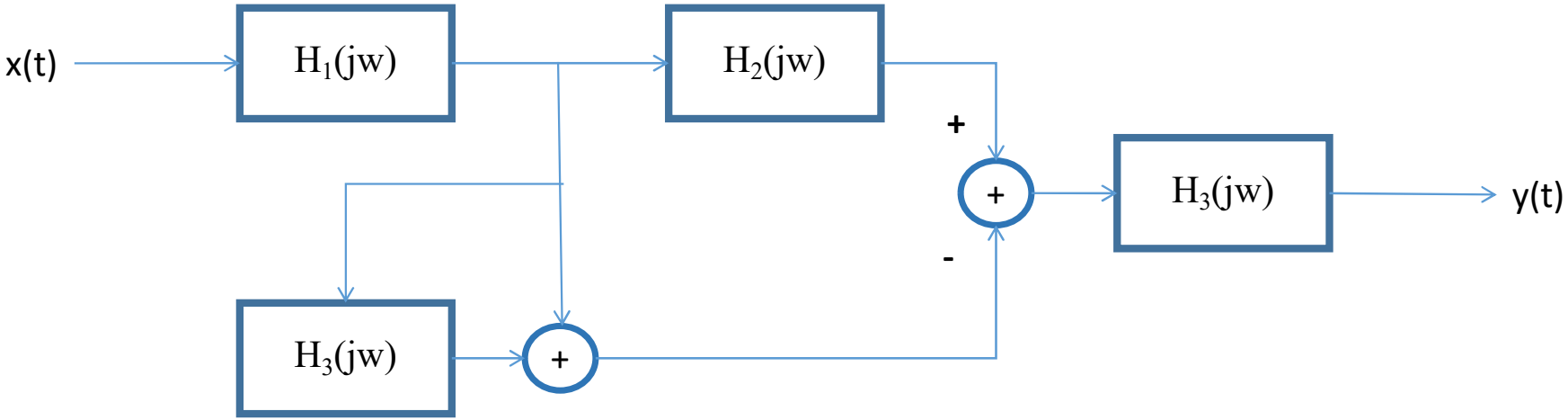
b) spektar signala s3(t) = ds(t)/dt je $S_3(j\omega) = j\omega * S(j\omega)$

Linearni sistemi

3. Na slici je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih sklopova su:

$H_1(jw) = \frac{1}{j\omega}$; $H_2(j\omega) = j\omega\, e^{-j\omega}$; $H_3(j\omega) = j\omega$

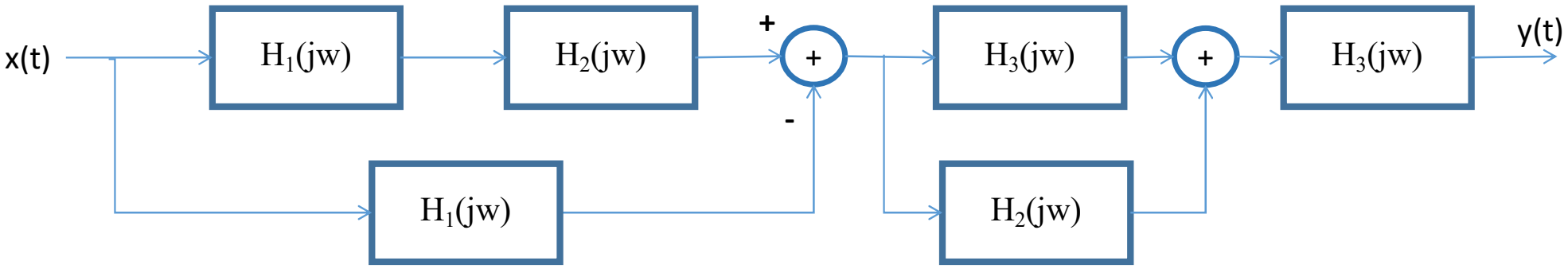
a) Odrediti prenosnu funkciju ovog sistema.



Linearni sistemi

Zadatak 4. Na slici je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih skolopova su: H1(jω) = jω , H2(jω) = $e^{j\omega}$ i H3(jω) = $e^{-j\omega}$

a) Odrediti prenosnu funkciju sistema.



Linearni sistemi

b) Ako na ulazu ovog sistema deluje impuls:

$$x(t) = \begin{cases} t, & -2 \le t \le 2 \\ 0, & t < -2 \text{ i } t > 2 \end{cases}$$

skicirati signal za izlazu sistema.

Koristiti zakonisti, da ako je poznat S(jω) - spektar signala s(t), i imamo signale s1(t) i s2(t) pri cemu su njihovi spektri $S_1(j\omega)$ i S2 (jω) ($S_1(j\omega)$ je spektar signala s1(t), S2 (jω) je spektar signala s2(t)) vazi:

a) ako je $S_1(j\omega) = e^{j\omega T_0}$ * S(jω) vazi da je s1(t) = s(t+T0),

b) ako je $S_2(j\omega) = j\omega$ * S(jω) vazi da je s2(t) = ds(t)/dt = (s(t))'

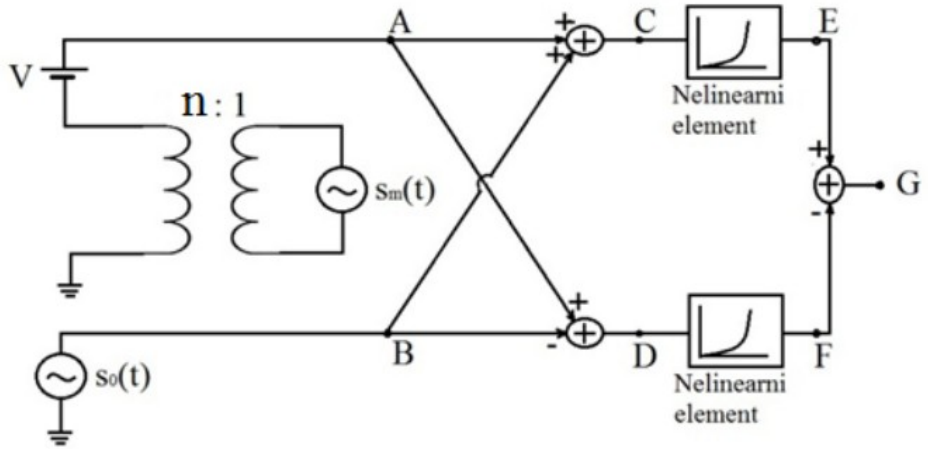
Analogna modulacija

Zadatak 1. Na slici 1. je data principska šema modulatora sa nelinearnim elementima. Zbir, odnosno razlika signala sm(t)=SmCosωmt i s0(t)=S0Cosω0t dovodi se na ulaz nelinearnih elemenata ćija je karakteristika kvadratna i data formulom:

$$s_{iz}(t)=\begin{cases} k * s_{ul}^2 , s_{ul}(t) > 0; \\ 0, \ s_{ul}(t) < 0 . \end{cases}$$

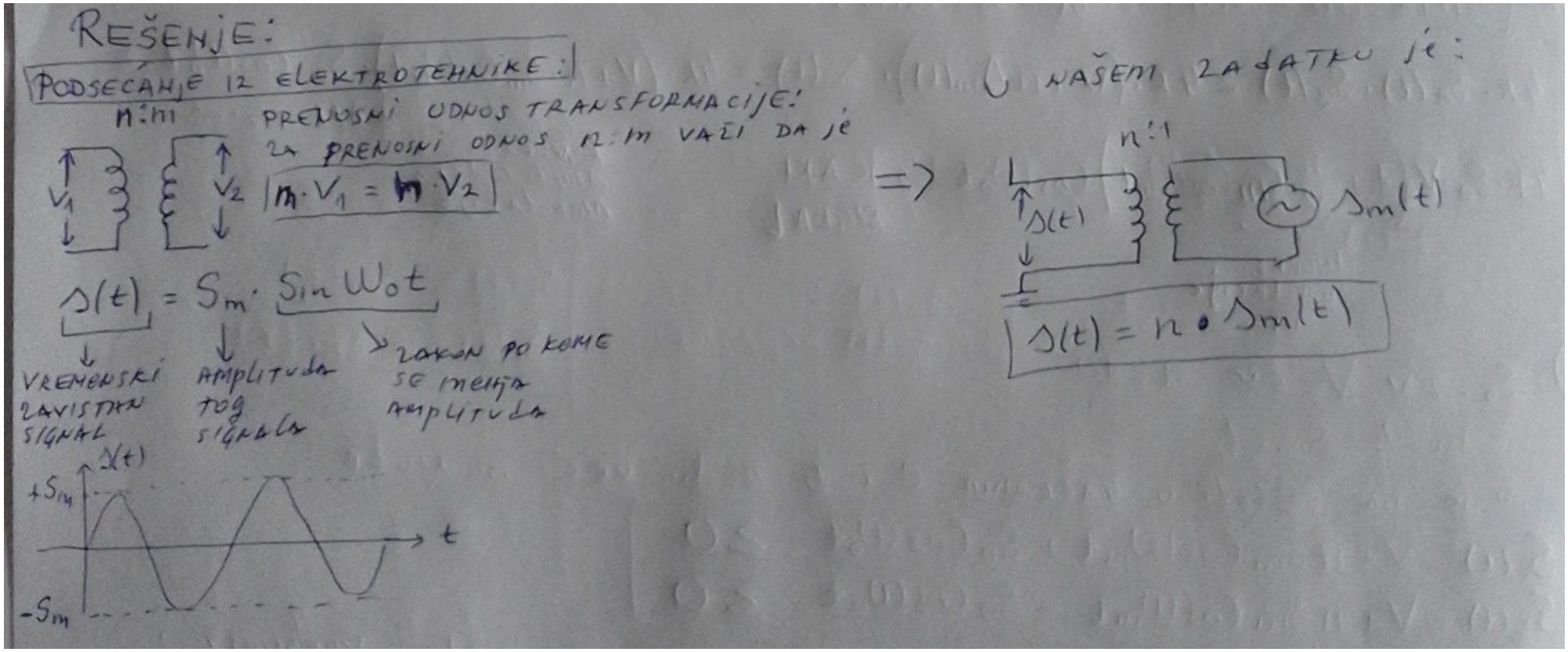
a) Utvrditi vrstu modulacije.

b) Ukoliko je za tu vrstu modulacije definisan indeks modulacije odrediti mu maksimalnu vrednost kao i amplitudu Sm. Poznato je S0=2V,V=5V, n=10.

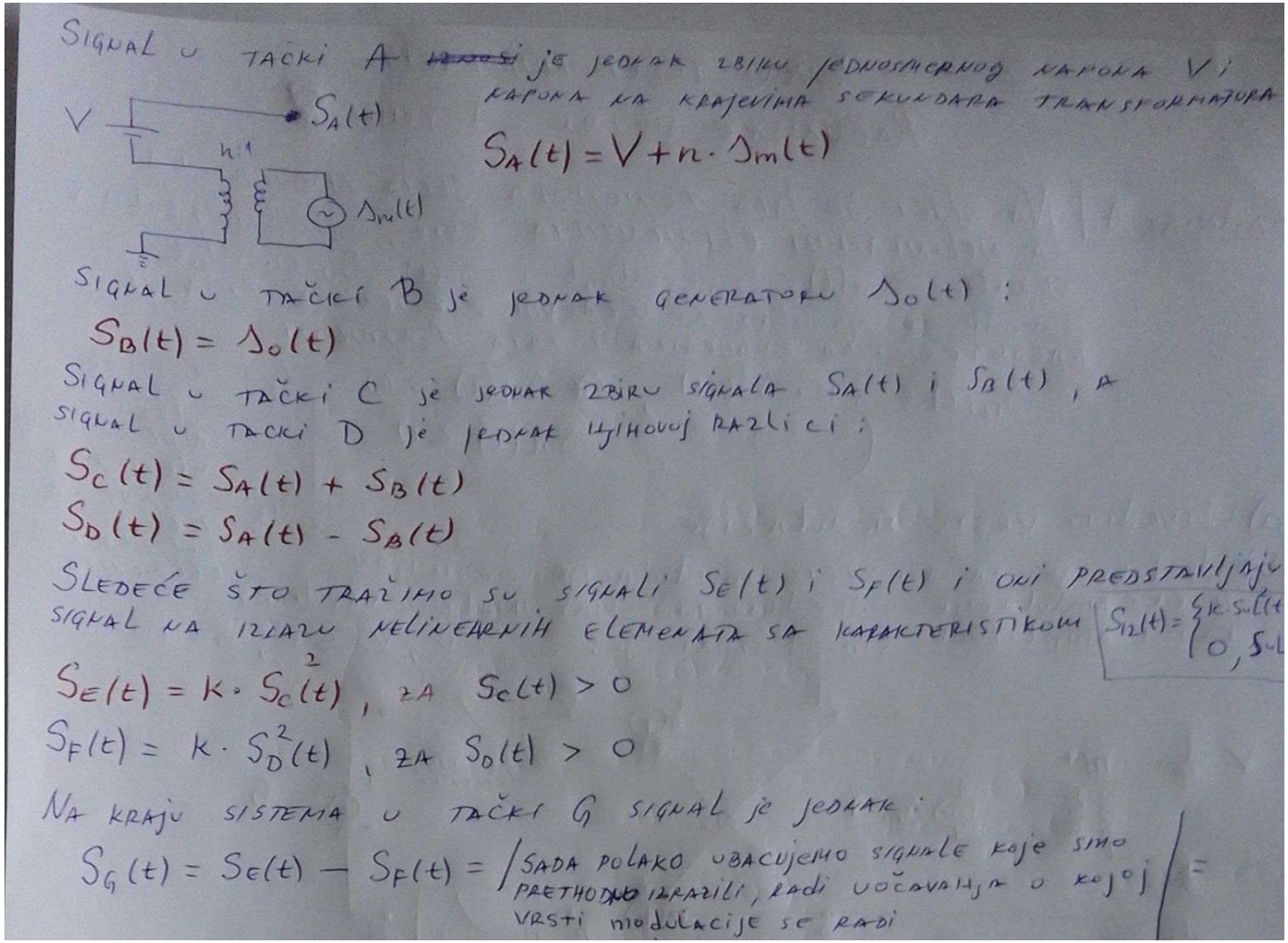


Slika 1.

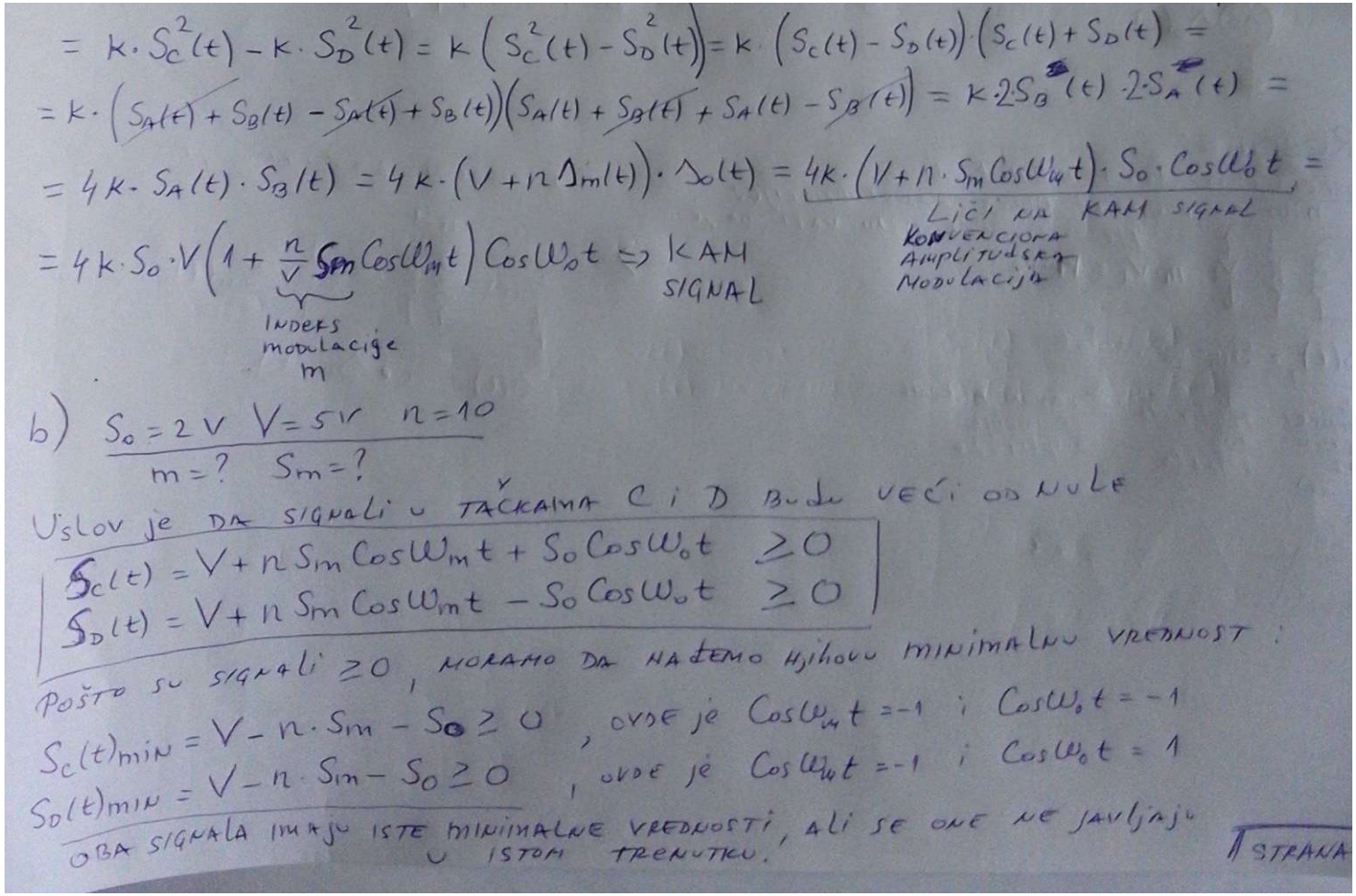
Analogna modulacija



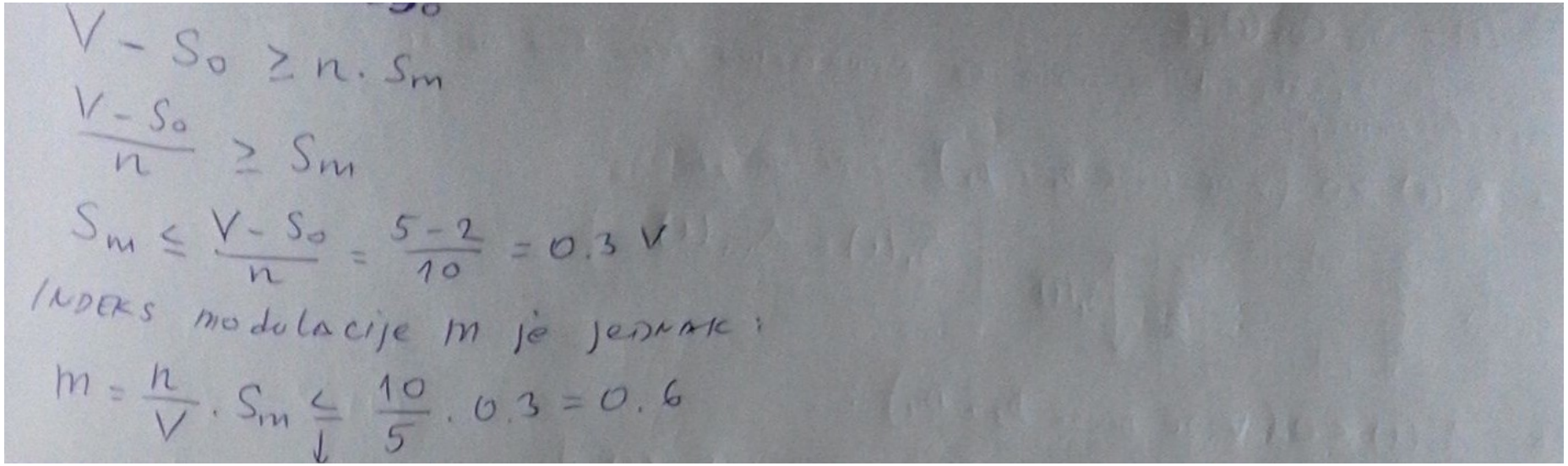
Analogna modulacija



Analogna modulacija



Analogna modulacija



$$V - S_0 \geq n \cdot S_m$$

$$\frac{V - S_0}{n} \geq S_m$$

$$S_m \leq \frac{V - S_0}{n} = \frac{5-2}{10} = 0.3\,V$$

INDEKS modulacije m je jednak:

$$m = \frac{n}{V} \cdot S_m \leq \frac{10}{5} \cdot 0.3 = 0.6$$

Multipleksni prenos signala

Zadatak 1. Potrebno je od dva telefonska i dva muzicka signala obrazovati multipleks sa vremenskom raspodelom primenom impulsne amplitudske modulacije. Poznato je da telefonski signal zauzima opseg od 400 Hz do 4000Hz, a muzicki od 50Hz do 5000Hz. Odrediti trajanje multipleks okvira (frejma), skicirati raspored signala u multipleks okviru i skicirati principijelnu shemu predajnika i prijemnika MUX signala.

REŠENJE:

FREKVENCIJA ODMERAVANJA TELEFONSKOG SIGNALA NAM JE DATA I NJU NE RAČUNAMO $\boxed{f_{OT} = 8\,kHz}$

FREKVENCIJA ODMERAVANJA MUZIČKOG SIGNALA SE UZIMA TAKO DA MORA BITI BAR DVA PUTA VEĆA OD GORNJE GRANIČNE FREKVENCIJE MUZIČKOG SIGNALA:

$$f_{OM} \geq 2 * f_{gM} \quad \text{(iz postavke vidimo da je } f_{gM} = 5000\text{H}$$
$$f_{OM} \geq 2 * 5\,kHz$$
$$\boxed{f_{OM} \geq 10\,kHz}$$

ZA SADA ZNAMO DA FREKVENCIJA ODMERAVANJA MUZIČKOG SIGNALA MORA DA BUDE VEĆA ILI JEDNAKA 10 kHz.
U SLEDEĆEM KORAKU ODREĐUJEMO KOLIKO TAČNO IZNOSI f_{OM}.

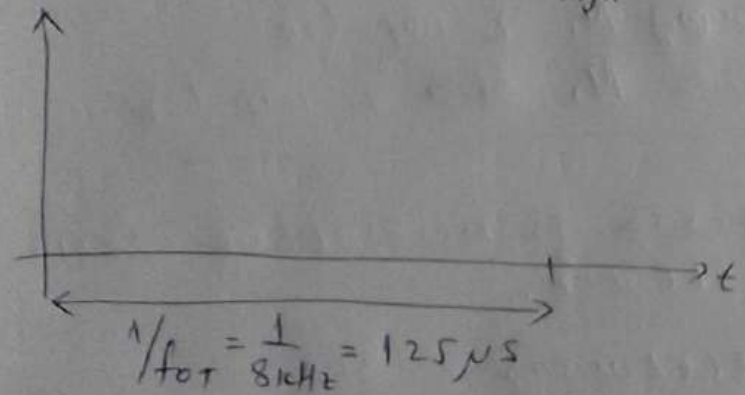
f_{OM} i f_{OT} TREBA DA SE ODNOSE KAO CEO BROJ (POŠTO JE f_{OT} MANJE OD f_{OM} ONDA TREBA DA f_{OM} IZRAZIMO KAO NEKI CEO BROJ PUTA f_{OT})

$$\boxed{f_{OM} = n * f_{OT} = n * 8\,kHz = \underbrace{2}_{\text{ukoliko stavimo 1 onda neće da bude ispunjen uslov } f_{OM} \geq 10\,kHz} * 8\,kHz = 16\,kHz}$$

ISPUNJEN USLOV $f_{OM} \geq 10\,kHz$

VREME JEDNOG CIKLUSA MULTIPLEKSIRANJA IZNOSI:

$1/f_{NIZA\ FREKVENCIJA\ ODMERAVANJA}$ tj $\boxed{1/f_{OT}}$



ZATIM ODREĐUJEMO BROJ IMPULSA U TOKU JEDNOG CIKLUSA, IMAMO 2 TELEFONSKA I 2 MUZIČKA SIGNALA.
FREKVENCIJA ODMERAVANJA MUZIČKOG SIGNALA JE 2 PUTA VEĆA OD FREKVENCIJE ODMERAVANJA TELEFONSKOG.
ZA JEDAN CIKLUS DUŽINE $1/f_{OT}$ IMAĆEMO PO JEDAN UZORAK OD SVAKOG TELEFONSKOG SIGNALA I PO DVA UZORKA SVAKOG MUZIČKOG SIGNALA.

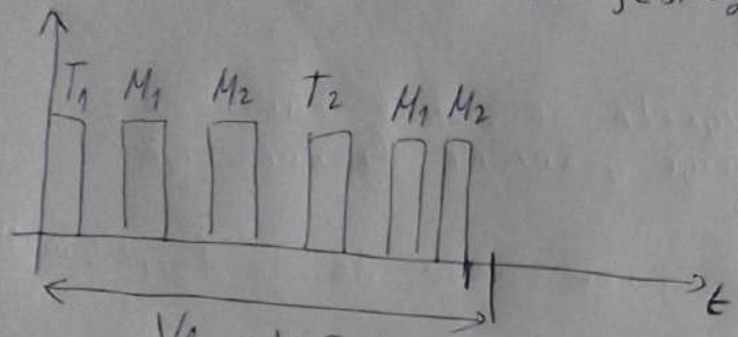
Ukupan broj impulsa = 2T + 2*2M = 2 + 4 = 6 impulsa

2T: 2 telefonska signala

2*2M: 2 muzička signala

Muzički signal se dva puta brže uzorkuje

Sada je potrebno da ta 6 impulsa rasporedimo pri čemu je ~~bilo~~ bitno da rastojanje ~~ka~~ između impulsa koji se više puta ponavljaju u toku jednog ciklusa bude fiksno.

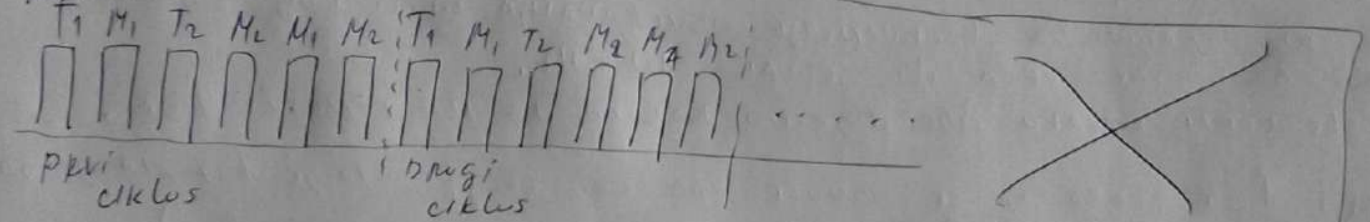


Pošto se telefonski signali uzorkuju samo po jednom (T_1 i T_2) njihov raspored nije bitan

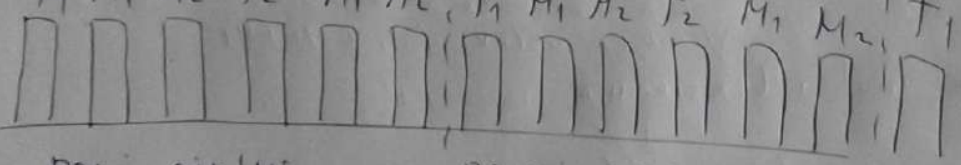
Muzički signali se uzorkuju po dva puta u toku jednog ciklusa (M_1 i M_2) pa rastojanje (broj impulsa između) od M_1 do M_1 i od M_2 do M_2 treba da bude fiksno.

NPR:

NPR:



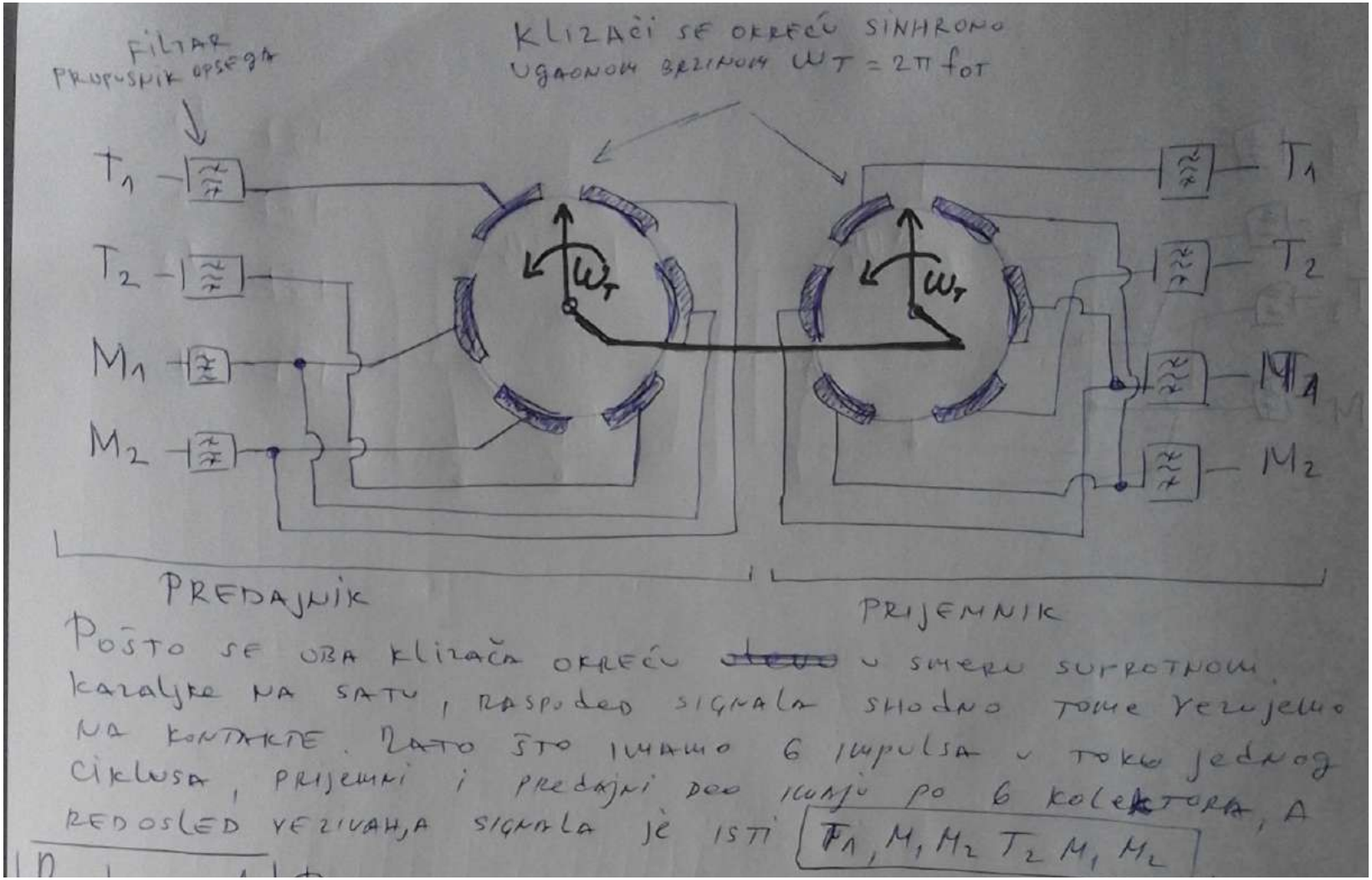
NIJE DOBRO – RASTOJANJE IZMEĐU DVA SUSEDNA M_2 NIJE FIKSNO



OK → RASTOJANJE OD M_1 DO SUSEDNOG M_1 2 IMPULSA
RASTOJANJE OD M_2 DO SUSEDNOG M_2 2 IMPULSA

AKO SE U ZADATKU TRAŽI DA SE NACRTA PRINCIPIJELNA ŠEMA PREDAJNIKA I PRIJEMNIKA ONDA RADIMO SLEDEĆE.

NA ULAZU U SISTEM IMAMO DVA TELEFONSKA I DVA MUZIČKA SIGNALA. TE ISTE SIGNALE TREBA DA REKONSTRUIŠEMO NA PRIJEMNOJ STRANI.



Pošto se oba klizača okreću u smeru suprotnom kazaljke na satu, raspored signala shodno tome vezujemo na kontakte. Zato što imamo 6 impulsa u toku jednog ciklusa, prijemni i predajni deo imaju po 6 kolektora, a redosled vezivanja signala je isti $T_1, M_1, M_2, T_2, M_1, M_2$

Multipleksni prenos signala

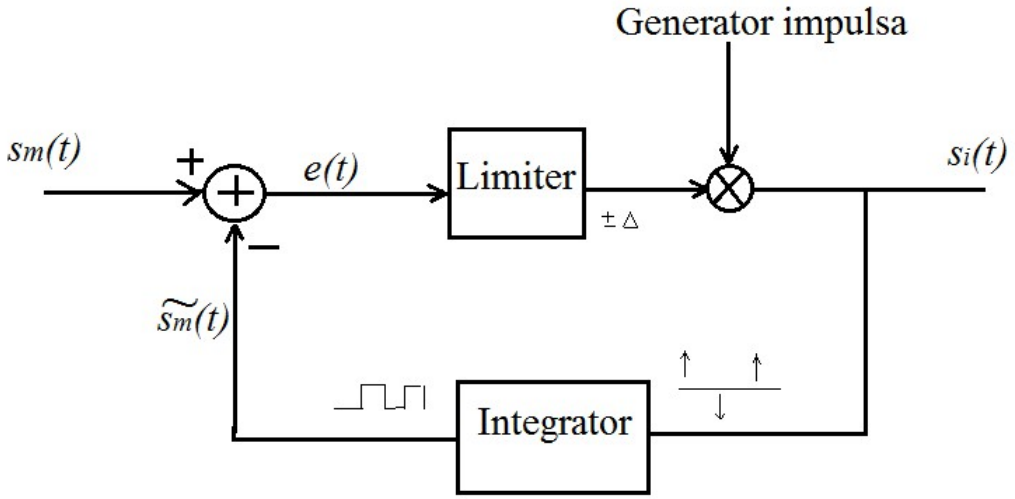
Zadatak 2. Potrebno je od tri telefonska i jednog muzickog signala obrazovati multipleks sa vremenskom raspodelom primenom impulsne amplitudske modulacije. Poznato je da telefonski signal zauzima opseg od 400 Hz do 4000Hz, a muzicki od 50Hz do 10000Hz. Odrediti trajanje multipleks okvira (frejma), skicirati raspored signala u multipleks okviru i skicirati principijelnu shemu predajnika i prijemnika MUX signala.

Delta modulacija

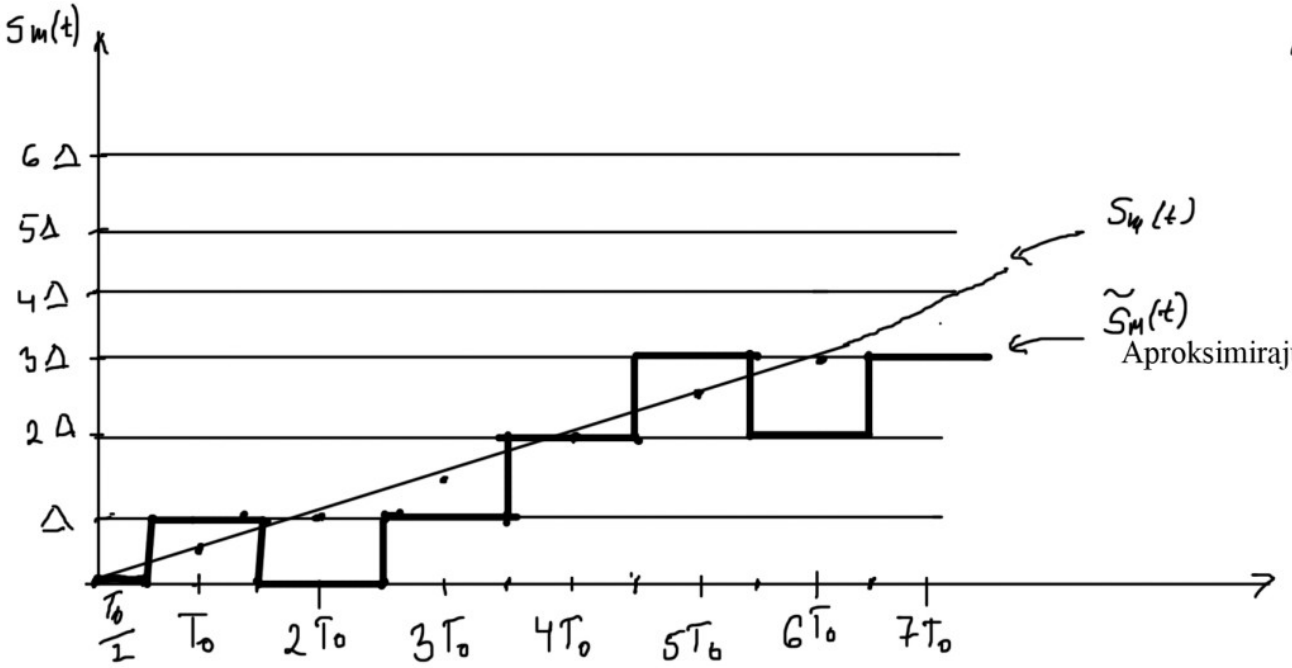
Zadatak 1. Na slici 1 je prikazana blok šema delta modulatora. Karakteristika limitera se može predstaviti sledećim izrazom $s_L(t) = \Delta \times \mathrm{sgn}\{e(t)\}$. Iz generatora impulsa se dobijaju impulsi vrlo kratkog trajanja pri čemu je površina svakog impulsa jednaka 1 Vs, a frekvencija ponavljanja iznosi $f_0=1/T_0$. Odmeravanje signala počinje u trenutku $t=T_0/2$ pri čemu je

$$\widetilde{s_m} = \{0, 0 < t < \frac{T_0}{2}$$

Ako na ulaz u modulator dolazi signal $s_m(t)=k*t$, $t \geq 0$, gde je k konstanta nacrtati vremenske oblike signala $s_m(t)$, $\widetilde{s_m}(t)$ i $s_i(t)$ kada je: a)$k=\Delta*f_0/2$, b) $k=\Delta*2*f_0$, c) $k=\Delta*f_0$.



Delta Modulacija

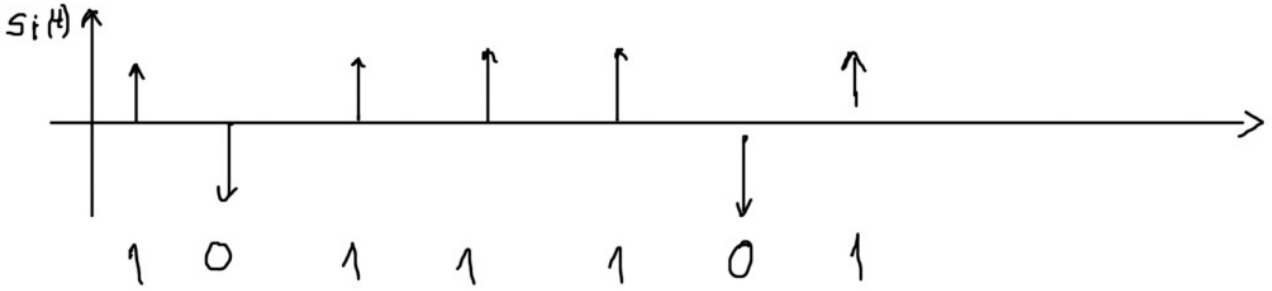


Aproksimirajuci signal signala sm(t)

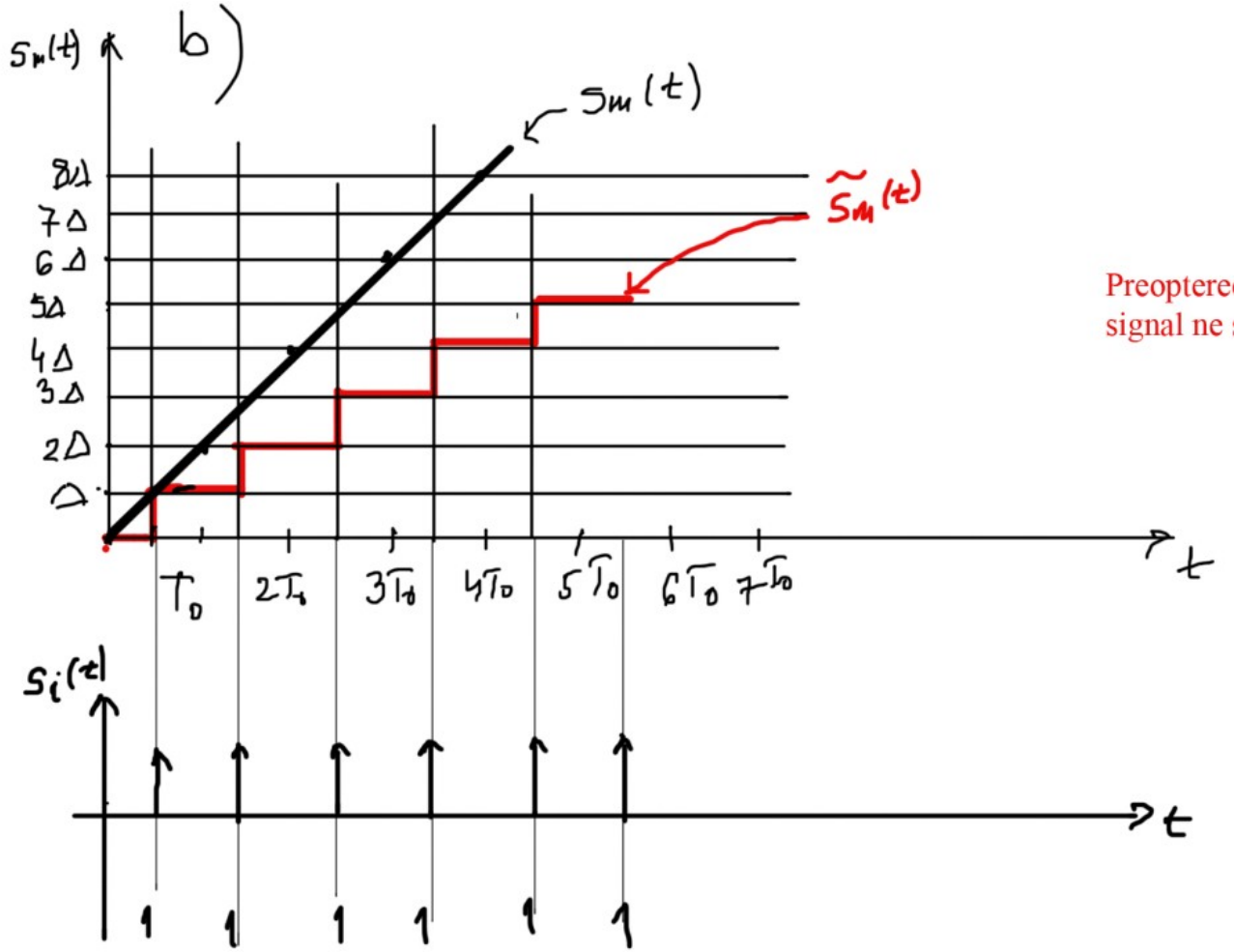
a) $K = \frac{\Delta}{2T_0}$

$S_M(t) = K \cdot t \quad t \geq 0$

$S_M(t) = \frac{\Delta}{2T_0} \cdot t$



Delta Modulacija

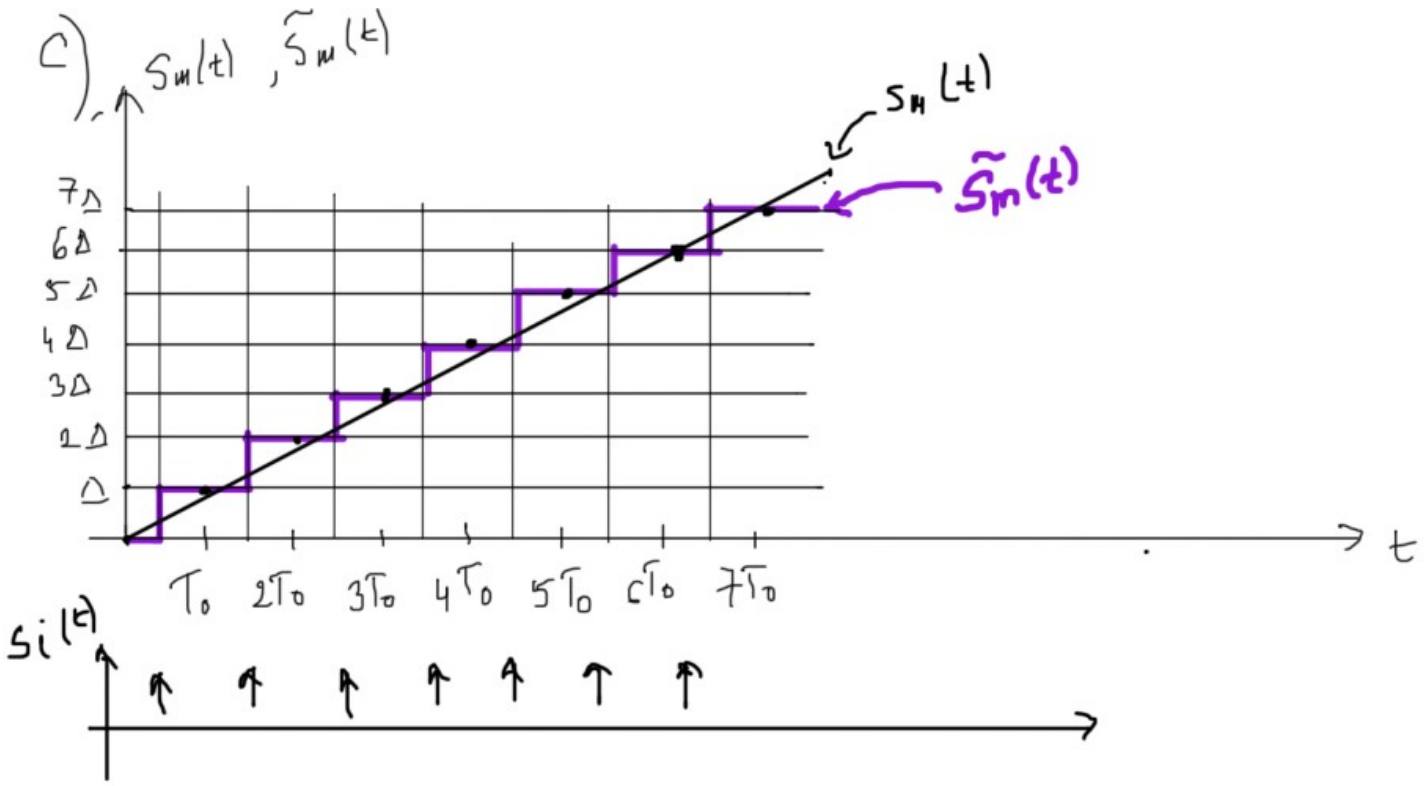


$$k = \frac{\Delta \cdot 2}{T_0}$$

$$s_m(t) = \frac{\Delta \cdot 2}{T_0} \cdot t \,, \; t \geq$$

Preopterecenje strminom nastaje kada aproksimi
signal ne stize da prati signal sm(t)

Delta Modulacija



$$K = \frac{\Delta}{T_0}$$

$$s_m(t) = \frac{\Delta}{T_0} \cdot t_1 \quad t \geq 0$$

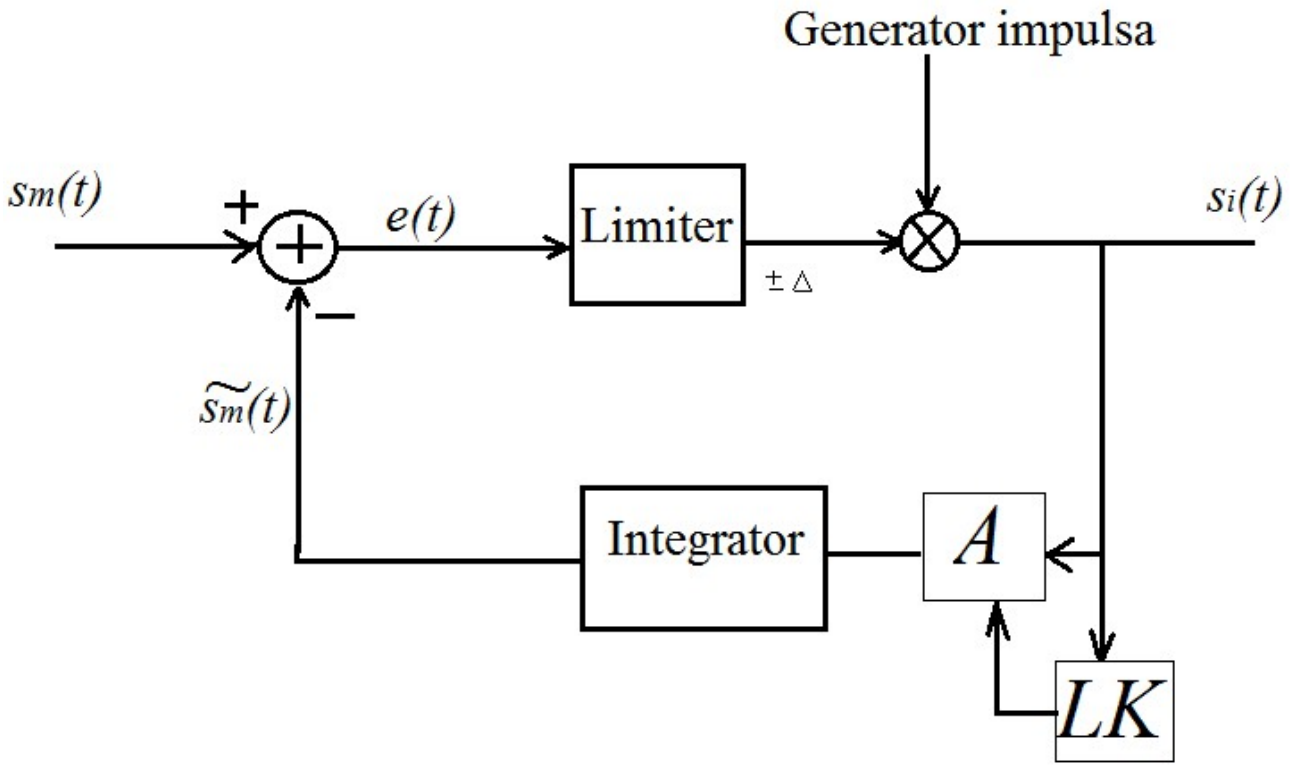
Adaptivna Delta modulacija

Zadatak 2. Na slici 2 je prikazana blok šema adaptivnog delta modulatora. Ovaj modulator se razlikuje od običnog delta modulatora po tome što sadrži pojačavač sa promenljivim pojačanjem kao i logičko kolo. Karakteristika limitera se može predstaviti sledećim izrazom $s_L(t) = \Delta \times \mathrm{sgn}\{e(t)\}$. Iz generatora impulsa se dobijaju impulsi vrlo kratkog trajanja pri čemu je površina svakog impulsa jednaka 1 Vs, a frekvencija ponavljanja iznosi $f_0=1/T_0$. Odmeravanje signala počinje u trenutku $t=T_0/2$ pri čemu je $\widetilde{s_m} = \{0, 0 < t < \frac{T_0}{2}$. Pojačanje pojačavača A se menja na sledeći način: ako se signal si(t) sastoji od povorke naizmeničnih pozitivnih i negativnih impulsa pojačanje iznosi A=1. Posle niza od N pozitivnih ili negativnih impulsa pojačanje poraste za N. Međutim, ukoliko se posle N impulsa istog polariteta promeni polaritet pojačanje opadne za 2. Najmanja vrednost pojačanja iznosi A=1 i u tom slučaju skok stepenaste aproksimacije ima vrednost Δ.

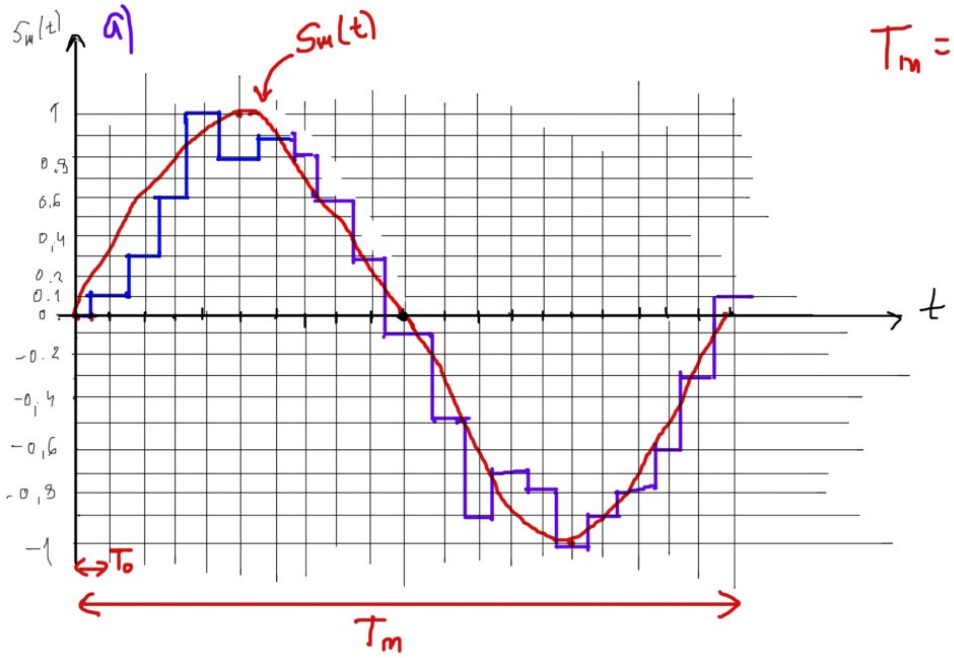
a)Nacrtati vremenski oblik aproksimativnog signala $\widetilde{s_m}$ kada je $s_m(t)=S_m*\sin(\omega_m t)$, $S_m=1V$. Frekvencija odmeravanja iznosi $f_0=20f_m$, a prvi odmerak se uzima u trenutku $t=T_0/2$.

b)Ako na ulaz u običan delta modulator dolazi signal definisan izrazom $s_m(t)=S_m*\sin(\omega_m t)$ odrediti frekvenciju odmeravanja tako da ne dođe do preopterećenja strminom. Vrednost skoka aproksimacije je Δ=0.1V.

Adaptivna Delta modulacija



Adaptivna Delta modulacija



b)

$$\frac{\Delta}{T_0'} = \left.\frac{d\,s_M(t)}{dt}\right|_{max} = \left.\frac{d\left(s_m \sin \omega_m t\right)}{dt}\right|_{max} = s_m \cdot \omega_m \cdot \cos \omega_m t \Big|_{max}$$

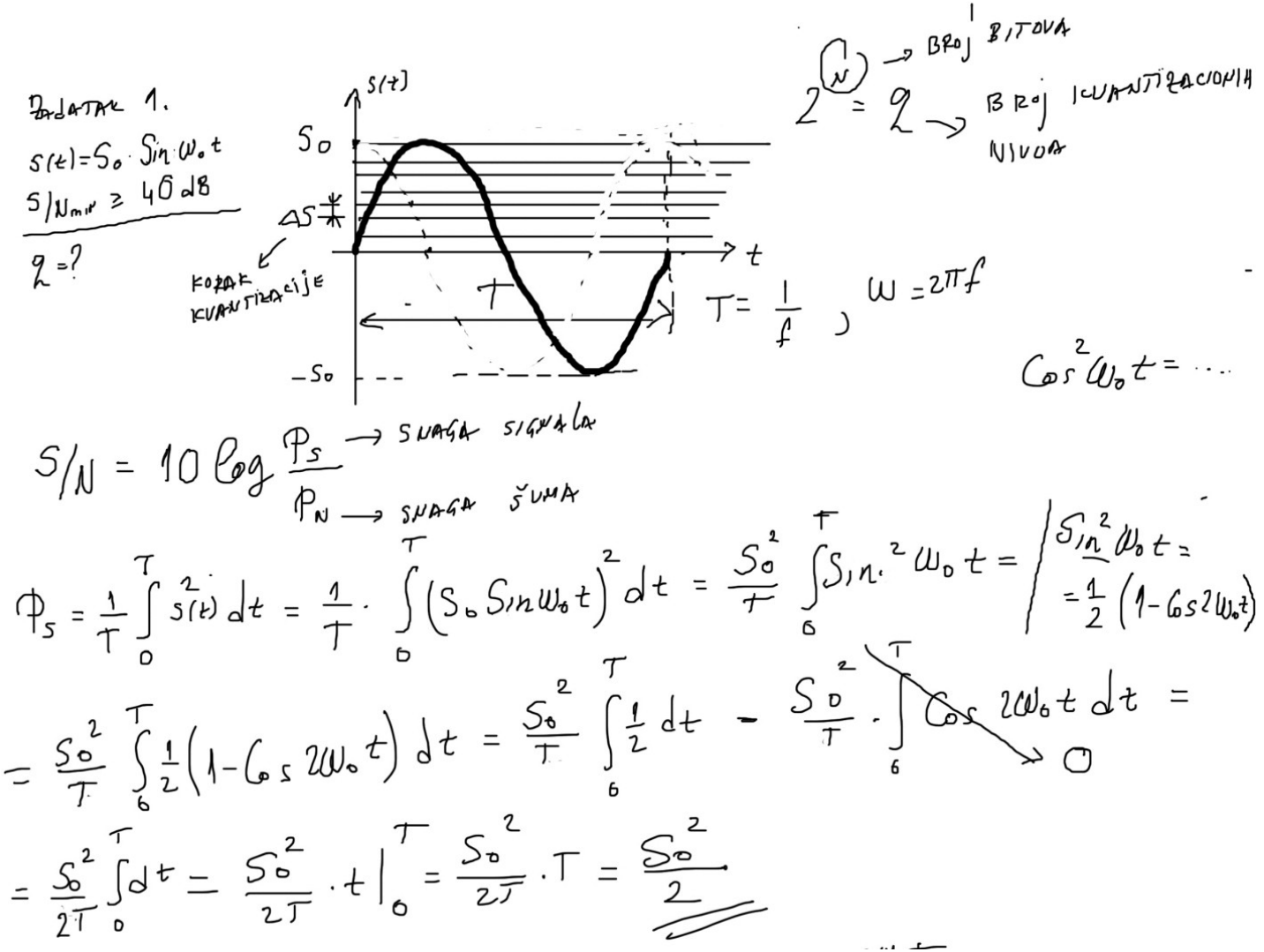
$$\Delta \cdot f_0' = s_m \cdot \omega_m$$

$$f_0' = \frac{s_m \cdot 2\pi \cdot f_m}{\Delta} = \frac{1 \cdot 2\pi f_m}{0.1} = 20\pi f_m = \pi \cdot f_0$$

Kvantiacija

Zadatak 1. Sinusoida $s(t)=S_o \sin \omega_o t$ idealno opterećuje kvantizer koji vrši uniformnu kvantizaciju. Minimalni dozvoljeni odnos S/N kvantizacije iznosi 40 dB. Odrediti optimalan broj kvantnih nivoa.

Kvantizacija



Kvantizacija

$$\int_0^T \cos 2\omega_0 t\, dt = \left| \begin{array}{l} 2\omega_0 t = x \\ 2\omega_0 dt = dx \\ 0 \to 2\omega_0 \cdot 0 = 0 \\ T \to 2\omega_0 T \end{array} \right| = \int_0^T \cos x \frac{dx}{2\omega_0} = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{2\omega_0 T} \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\omega_0} \cdot \sin x \Big|_0^{2\omega_0 t} = \frac{1}{2\omega_0} \left(\sin 2\omega_0 t - \sin 0 \right) = \left| \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T = 0 \right.$$

$$P_N = \frac{\Delta S^2}{12} = \frac{\left(\frac{2S_0}{q}\right)^2}{12} = \frac{\frac{4S_0^2}{q^2}}{12} = \frac{S_0^2}{3q^2}$$

$$q = \frac{S_{MAX} + |S_{MIN}|}{2\left(\frac{\Delta S}{2}\right)} = \frac{2S_{max}}{\Delta S} = \frac{2S_0}{\Delta S} \Rightarrow \boxed{\Delta S = \frac{2S_0}{q}}$$

Kvantizacija

$$S/N = 10 \log \frac{P_s}{P_N} \geq 40 \text{ dB}$$

$$10 \log \frac{\frac{S_0^2}{2}}{\frac{S_0^2}{3q^2}} \geq 40$$

$$10 \log \frac{3q^2}{2} \geq 40 \quad / : 10$$

$$\log \frac{3q^2}{2} \geq 4 \quad / 10^{\wedge} \quad \left(10^{\log_{10} x} = x\right)$$

$$10^{\log \frac{3q^2}{2}} \geq 10^4$$

$$\frac{3q^2}{2} \geq 10^4$$

$$3q^2 \geq 2 \cdot 10^4$$

$$q \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{3}} = \sqrt{6666{,}66} = 81{,}64$$

$$2^N = q$$

$N = 7 : 2^7 = 128$ W $\Rightarrow$ $q = 128$

~~$N = 6 : 2^6 = 64$ X~~

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Kvantiacija

Zadatak 2. Na ulaz uniformnog kvantizersa sa 512 kvantnih nivoa dolazi signal $s(t)=S0\sin\omega 0t$ koji idealno opterećuje kvantizer. Odrediti odnos S/N kvantizacije.

Kvantiacija

$$s(t) = S_0 \sin \omega_0 t$$

$$q = 512$$

$$S/N = ?$$

$$S/N = 10 \log \frac{P_S}{P_N}$$

$$P_S = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t)\, dt = \ldots = \frac{S_0^2}{2}$$

$$P_N = \frac{\Delta s^2}{12} = \left| \begin{array}{l} \text{POŠTO JE REČENO} \\ \text{DA SINUSOIDA IDEALNO} \\ \text{OPTEREĆUJE KVANTIZER } S_{max} = S_0 \end{array} \right| = \frac{\left(\frac{2S_0}{q}\right)^2}{12} = \frac{S_0^2}{3q^2}$$

$$q = \frac{S_{max} + |S_{min}|}{2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{2}\right)} = \frac{2 S_{max}}{\Delta s} \Rightarrow \Delta s = \frac{2 S_{max}}{q}$$

$$S/N = 10 \log \frac{\frac{S_0^2}{2}}{\frac{S_0^2}{3q^2}} = 10 \log \frac{3q^2}{2} = 10 \log \frac{3 \cdot (512)^2}{2} = \underline{\underline{55\ dB}}$$