ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ПРИПРЕМУ ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА

Примери задатака према програму пријемног испита из математике

Рационални алгебарски изрази

Приликом сређивања алгебарских израза најчешће се користе формуле за растављање полинома на чиниоце:

$ax \pm bx = x(a \pm b)$ (издвајање заједничког чиниоца)
$ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$ (груписање чланова)
$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$ (квадрат збира / разлике)
$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ (разлика квадрата)
$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$ (збир / разлика кубова)
$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$ (куб збира / разлике)

1. Упростити израз: $\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)\frac{ab}{a-b}$.

Решење:

$$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)\frac{ab}{a-b} = \frac{b^3-a^3}{a^3b^3}\left(-\frac{ab}{b-a}\right) = \frac{(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)}{(ab)^3}\left(-\frac{ab}{b-a}\right) = -\frac{b^2+ab+a^2}{(ab)^2}, (a, b \neq 0, a \neq b).$$

2. Скратити разломак: $\frac{x^2+xy+x+y}{x^2+2xy+y^2}$.

Решење:

$$\frac{x^2+xy+x+y}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x(x+y)+(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)(x+1)}{(x+y)^2} = \frac{x+1}{x+y}, (x+y \neq 0).$$

3. Ако је $f(x) = \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$, израчунати $f\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Решење:

Како је $f(x) = \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1} = \frac{x^2-2x+1-1-1}{x^2+2x+1-1-1} = \frac{(x-1)^2-2}{(x+1)^2-2}$, то је $f\left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{\left(\sqrt{2}+1-1\right)^2-2}{\left(\sqrt{2}+1+1\right)^2-2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-2}{\left(\sqrt{2}+2\right)^2-2} = \frac{2-2}{2+4\sqrt{2}+4-2} = 0.$

4. Израчунати вредност израза $\left((a+a^{-1})-(b+b^{-1})\right)^{\frac{1}{2}}$ за $a = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ и $b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Решење:

Како је

$$a + a^{-1} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)} =$$
$$= \frac{4-4\sqrt{4}+3+4+4\sqrt{3}+3}{4-3} = 14$$

и

$$b + b^{-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \frac{3-2\sqrt{6}+2+3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = 10$$

то је $\left((a+a^{-1})-(b+b^{-1})\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14-10} = \sqrt{4} = 2.$

5. Показати да вредност израза A не зависи од a и b:

$$A=\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}+\frac{1}{\frac{a+b}{a}}-\frac{1}{\frac{a-b}{a}}\right):\frac{\frac{a+b-(a-3b)}{a+b}}{\frac{3a+b-3(a-b)}{a-b}}.$$

Решење:

$$A=\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}+\frac{1}{\frac{a+b}{a}}-\frac{1}{\frac{a-b}{a}}\right):\frac{\frac{a+b-(a-3b)}{a+b}}{\frac{3a+b-3(a-b)}{a-b}}=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}+\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a-b}\right):\frac{\frac{4b}{a+b}}{\frac{4b}{a-b}}=\frac{a^2+b^2+a(a-b)-a(a+b)}{(a-b)(a+b)}:\frac{a-b}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1;$$

$$(a\neq 0, b\neq 0, a-b\neq 0, a+b\neq 0).$$

Линеарне једначине и неједначине

Једначина облика $\mathrm{ax}+\mathrm{b}=0, \mathrm{a},\mathrm{b}\in \mathrm{R}$, назива се линеарна једначина са једном непознатом. Уколико важи да је:

1. $a\neq 0$, једначина има јединствено решење $x=-\frac{b}{a}$;
2. $a=0, b=0$, једначина је неодређена и има бесконачно много решења;
3. $a=0, b\neq 0$, једначина је немогућа и нема решења.

6. Решити једначину: $\frac{2a-x}{1-2a}-\frac{2a+x}{2a+1}=\frac{2ax}{4a^2-1}$.

Решење:

За $a\neq\pm\frac{1}{2}$ дата једначина је еквивалентна једначини: $(x-2a)(2a+1)-(2a+x)(2a-1)-2ax=0$, па се после сређивања добија једначина $(1-a)x=4a^2$, која за $a\neq 1$ има јединствено решење $x=\frac{4a^2}{1-a}$. За $a=1$ једначина је немогућа.

Квадратне једначине и неједначине. Квадратна функција

Једначина облика $ax^2+bx+c=0, a,b,c\in R, a\neq 0$, назива се квадратна једначина. Решења квадратне једначине дата су формулом:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Израз под кореном $D=b^2-4ac$, назива се дискриминанта квадратне једначине и од ње зависи природа решења квадратне једначине:

1. $D>0$, решења су реална и различита;
2. $D=0$, решења су реална и једнака;
3. $D<0$, решења су конјуговано комплексни бројеви.

Ако су x_1, x_2 решења квадратне једначине, важи следеће:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, (Виетове формуле);

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

7. Одредити m тако да решења једначине $3x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ задовољавају услов $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = 64$.

Решење:

Према Виетовој формули је $x_1 + x_2 = \frac{2m}{3}$ и како је $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$ и $64 = 4^3$, то је $x_1 + x_2 = 4$ тј. $\frac{2m}{3} = 4$, одакле је $m = 6$.

8. Одредити параметар a тако да један од корена једначине $x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$ буде квадрат другог корена.

Решење:

Према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = \frac{15}{4}$ и $x_1 \cdot x_2 = a$ и како је један корен квадрат другог тј. $x_1 = x_2^2$ то је $x_2^2 + x_2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow 4x_2^2 + 4x_2 - 15 = 0$. Одавде је $x_2' = \frac{3}{2}$ и $x_2'' = -\frac{5}{2}$ и како је $a = x_2^3$ то постоје две вредности параметра *a* које задовољавају постављени услов: $a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ и $a_2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$.

9. Не решавајући квадратну једначину $x^2 - x + m = 0$, одредити параметар $m \in R$, тако да њена решења задовољавају услов $x_1^3 + x_2^3$=7.

Решење:

Користећи Виетове формуле добијамо да је $x_1 + x_2 = 1$ а $x_1 \cdot x_2 = m$. Како је

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2) = \\ &= 1 \cdot (1^2 - 3m) = \\ &= 1 - 3m \end{aligned}$$

и $x_1^3 + x_2^3 = 7$, па је $1 - 3m = 7$, а $m = -2$.

10. Решити неједначину $\frac{4x-2}{-x^2+3x+4} > 1$.

Решење:

Дата неједначина може се представити у облику $\frac{4x-2}{-x^2+3x+4} - 1 > 0$ тј. $\frac{x^2+x-6}{-x^2+3x+4} > 0$ односно $\frac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-4)} < 0$. Решења последње неједначине су $x \in (-3, -1) \cup (2,4)$. Шематски приказ решења дат је у табели.

x	-3	-1	2	4	
$(x-2)\cdot(x+3)$	+	-	-	+	+
$(x+1)\cdot(x-4)$	+	+	-	-	+
$\frac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-4)}$	+	-	+	-	+

11. Решити једначину $\sqrt{x+10} - \frac{6}{\sqrt{x+10}} = 5$.

Решење:

Сменом $\sqrt{x+10} = t$ једначина постаје $t - \frac{6}{t} = 5$, односно, $t^2 - 5t - 6 = 0$. Корени ове једначине су $t_1 = 6$ и $t_2 = -1$. Међутим, $t_2 = -1$ није решење, јер t не може бити негативно. За $t = 6$ добијамо $x + 10 = 36$ тј. $x = 26$.

12. Решити једначину: $2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + 10 = 0$.

Решење:

Увођењем смене $t = \frac{x^2+1}{x}$, једначина има облик: $2t^2 - 9t + 10 = 0$, а њена решења су $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = 2$. Тада је:

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2} \vee \frac{x^2+1}{x} = 2,$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \ \vee \ x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = 1.$$

Степеновање. Кореновање. Логаритмовање

Основна својства *степена* реалних бројева дата су следећим формулама:

$$a^1 = a, a^{n+1} = a^n a\ , \ (a \in R, n \in N);$$
$$a^0 = 1,\ \ (a \neq 0);$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ (a \neq 0, n \in N);$$
$$a^m a^n = a^{m+n},$$
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn},$$
$$(ab)^n = a^n b^n,$$
$$(a:b)^n = a^n : b^n,\ (a, b \in R\backslash\{0\}, m, n \in Z).$$

Основна својства *корена* реалних бројева са природним изложиоцима су:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, n - \text{непаран} \\ |a|, n - \text{паран} \end{cases},\ (a \in R, n \in N),$$
$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}},$$
$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}, (b \neq 0),$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},$$
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}},\ (a \geq 0, b \geq 0, m, n, p \in N).$$

Логаритам броја $b, (b > 0)$, за основу $a, (a > 0 \wedge a \neq 1)$, дефинише се на следећи начин:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Ако је $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, s \in R, r \in R\{0\}$, тада важи:

$$a^{log_a b} = b,$$
$$log_a a = 1,$$
$$log_a 1 = 0,$$
$$log_a b = \frac{1}{log_b a},$$
$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a},$$
$$log_a b^s = s\, log_a b,$$
$$log_{a^r} b = \frac{1}{r} log_a b,$$
$$log_a b\, c = log_a b + log_a c,$$
$$log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c.$$

13. Решити једначину: $9^x + 3^{x+1} + 2 = 0$.

Решење:

Дату једначину можемо записати као $(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x + 2 = 0$. После увођења смене $3^x = t$ добијамо $t^2 + 3t + 2 = 0$, одакле је $t_1 = -1$ и $t_2 = -2$. Како је $3^x > 0$ то једначина нема решења.

14. Решити једначину: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x = 4, \text{ тј. } \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 4.$$

Увођењем смене $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t$ добијамо $t + \frac{1}{t} = 4$ тј. $t^2 - 4t + 1 = 0$. Одавде добијамо $t_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $t_2 = 2 + \sqrt{3}$ тј.

$$(2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2-\sqrt{3}) \text{ и } (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1},$$

$$\frac{x}{2} = 1 \quad \vee \quad \frac{x}{2} = -1,$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -2.$$

15. Израчунати вредност израза: $2\, log_5 1\,25 \cdot 2^{1+log_2 4} - 3^{2\, log_3 9 - 1}$.

Решење:

$$2\, log_5 1\,25 \cdot 2^{1+log_2 4} - 3^{2\, log_3 9-1} = 2\, log_5 5^3 \cdot 2^{1+log_2 2^2} - 3^{2\, log_3 3^2 - 1} = 2\cdot 3\cdot 8 - 27 = 21.$$

16. Решити једначину: $log\sqrt{x-5} + log\sqrt{2x-3} + 1 = log\, 3\,0$.

Решење:

Нека је $x - 5 > 0$ и $2x - 3 > 0$, тј. $x > 5$. Дата једначина еквивалентна је једначини $log\sqrt{(x-5)\cdot(2x-3)} = log\, 3$, тј. $(x-5)\cdot(2x-3) = 9$, односно, једначини $2x^2 - 13x + 6 = 0$ чија су решења $x_1 = 6$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, од којих је само прво решење полазне једначине.

17. Решити једначину: $log_x 2 - log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

Решење:

Нека је $x > 0$ и $x \neq 1$. Дата једначина еквивалентна је једначини $log_x 2 - \frac{1}{2\, log_x 2} + \frac{7}{6} = 0$. Уведимо смену $log_x 2 = t$. Тада је $t - \frac{1}{2t} + \frac{7}{6} = 0$, тј. $6t^2 + 7t - 3 = 0$, одакле је $t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = -\frac{3}{2}, x_1 = 2^3 = 8, x_2 = 2^{-\frac{2}{3}}$.

Аритметички и геометријски низови

Низ бројева у коме је разлика свака два суседна члана низа једнака, назива се *аритметички низ* (аритметичка прогресија).

a_1 –први члан низа;
a_n – n-ти (општи) члан низа, $n \in N$;
d – разлика аритметичког низа;
S_n –збир првих n чланова.

За аритметички низ важе следеће формуле:

$$a_n = a_1 + (n-1)d;$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Низ бројева у коме је количник свака два суседна члана низа једнак, назива се *геометријски низ* (геометријска прогресија).

a_1 –први члан низа;
a_n – n-ти (општи) члан низа, $n \in N$;
q – количник аритметичког низа;
S_n –збир првих *n* чланова.

За геометријски низ важе следеће формуле:

$$a_n = a_1 q^{n-1};$$
$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}, |q| > 1; \qquad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, |q| < 1.$$

18. Један угао троугла је 120^o, а странице тог троугла образују аритметичку прогресију чија је разлика $d = 4$. Колике су странице тог троугла?

Решење:

Нека је $c = b + 4$, $b = b$, $a = b - 4$, $\gamma = 120^o$. Према косинусној теореми је $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, одакле је $(b+4)^2 = (b-4)^2 + b^2 - 2(b-4)\cdot b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, па је $2b^2 - 20b = 0$, тј. $2b \cdot (b - 10) = 10$. Дакле $b = 10, a = 6$ и $c = 14$.

19. Три броја чине аритметички низ. Њихов збир је 6, а збир њихових квадрата 62. Који су то бројеви?

Решење:

Нека је $a_1 = a_2 - d, a_2 = a_2, a_3 = a_2 + d$.

Како је $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ тј. $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 6 \Rightarrow 3a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 2$.

Како је $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 62$ то је $(a_2 - d)^2 + a_2^2 + (a_2 + d)^2 = 62$, $3a_2^2 + 2d^2 = 62$, $3 \cdot 4 + 2d^2 = 62$, $d^2 = 25$, $d = \pm 5$, па су тражене вредности бројева $-3,2,7$.

20. Бројеви: $2x - 3$, $3x + 4$, $5x + 1$ су прва три узастопна члана аритметичког низа. Одредити x и наћи суму првих x чланова.

<u>Решење:</u>

$$a_1 = 2x - 3, a_2 = 3x + 4, a_3 = 5x + 1.$$

Како је: $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, то је $(3x + 4) - (2x - 3) = (5x + 1) - (3x + 4)$, $x + 7 = 2x - 3$, $x = 10$, па је $a_1 = 17$, $a_2 = 34$, $a_3 = 51$, $d = 17$. Отуда је $S_x = S_{10} = \frac{10}{2} \cdot [2a_1 + (10 - 1)d] = 5 \cdot [2 \cdot 17 + 9 \cdot 17] = 935$.

21. Четврти члан аритметичког низа је 9, а девети члан је -6. Колико чланова овог низа треба сабрати да се добије 54?

<u>Решење:</u>

Како је: $a_4 = a_1 + 3d = 9$, $a_9 = a_1 + 8d = -6$, решавањем система добије се да је $d = -3$, $a_1 = 18$.

$S_n = \frac{n}{2}\big(2a_1 + d(n - 1)\big)$ па је $\frac{n}{2}\big(36 - 3(n - 1)\big) = 54$, $\Leftrightarrow -n^2 + 13n - 36 = 0$.

Решења ове квадратне једначине су $n_1 = 4$ и $n_2 = 9$. Дакле, треба сабрати 4 или 9 чланова низа.

22. Збир три броја која образују растућу геометријску прогресију је 126. Ако је средњи члан 24, одредити најмањи члан.

<u>Решење:</u>
Како је $a_2 = 24$ и $a_1 + a_2 + a_3 = 126$, то је $\frac{24}{q} + 24 + 24q = 126$, $4q^2 - 17q + 4 = 0$, одакле је $q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$.
Међутим, прогресија је растућа па решење $q = \frac{1}{4}$ не долази у обзир. Дакле, $a_1 = \frac{24}{4} = 6$.

23. Три броја чине аритметички низ, а њихов збир је 12. Ако се последњи број повећа за вредност првог, добија се геометријски низ. Који су то низови?

<u>Решење:</u>

Означимо чланове аритметичког низа са a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Тада је

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12 \Leftrightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Leftrightarrow a_1 + d = 4. \quad (1)$$

Геометријски низ би био према условима задатка $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + d$, $b_3 = a_3 + a_1 = a_1 + 2d + a_1 = 2a_1 + 2d$.
Како је $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, то је $(a_1 + d)^2 = a_1 \cdot (2a_1 + 2d)$, $(a_1 + d)^2 = 2a_1 \cdot (a_1 + d)$, $a_1 = d$ (2)
Једначине (1) и (2) дају решење d=2, a_1=2 па је аритметички низ 2, 4, 6, а геометријски 2, 4, 8.

Тригонометрија

Ако је α оштар угао, a и b катете, (наспрам угла α је катета a), а c хипотенуза правоуглог троугла, тада се тригонометријске функције дефинишу на следећи начин:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad tg\alpha = \frac{a}{b}, \quad ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

За тригонометријске функције важе основни тригонометријски идентитети:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$tg\alpha ctg\alpha = 1,$$
$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Тригонометријске функције збира и разлике два угла једнаке су:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta},$$
$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta}.$$

Тригонометријске функције двоструког угла једнаке су:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$
$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Тригонометријске функције полууглова једнаке су:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Трансформација збира и разлике у производ:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Трансформација производа у збир или разлику:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

24. Ако је $tg^2\alpha + ctg^2\alpha = 2$, израчунати $tg\alpha + ctg\alpha$.

Решење:

Како је $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 = tg^2\alpha + 2tg\alpha ctg\alpha + ctg^2\alpha$ и $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то је $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 = 4$, одакле је $tg\alpha + ctg\alpha = \pm 2$.

25. Упростити израз: $\frac{1+sin\,2a-cos\,2a}{1+sin\,2a+cos\,2a}$.

Решење:

Коришћењем формула добија се:

$$\frac{1+\sin 2a-\cos 2a}{1+\sin 2a+\cos 2a}=\frac{\cos^2 a+\sin^2 a+\sin 2a-\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)}{\cos^2 a+\sin^2 a+\sin 2a+\cos^2 a-\sin^2 a}=$$
$$=\frac{2\sin^2 a+2\sin a\cos a}{2\cos^2 a+2\sin a\cos a}=\frac{2\sin a(\sin a+\cos a)}{2\cos a(\sin a+\cos a)}=\operatorname{tg} a$$

26. Ако је $\mathrm{tg}\alpha = 3$, израчунати $\frac{2\,sin\,2\alpha-3\,cos\,2\alpha}{4\,sin\,2\alpha+5\,cos\,2\alpha}$.

Решење:

Дати израз $\frac{2\,sin\,2\alpha-3\,cos\,2\alpha}{4\,sin\,2\alpha+5\,cos\,2\alpha}$ се дељењем сваког члана са $cos\,2\,\alpha$ трансформише у израз $\frac{2tg2\alpha-3}{4tg2\alpha+5}$. Како је $tg\alpha = 3$ то је $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\frac{3}{4}$, па је тражена вредност израза једнака $-\frac{9}{4}$.

27. Решити једначину: $cos^4\,x - sin^4\,x = 0$.

Решење:

Дата једначина је еквивалентна једначини: $(cos^2\,x - sin^2\,x)\cdot(cos^2\,x + sin^2\,x) = 0$, па је $cos^2\,x - sin^2\,x = 0 \Leftrightarrow tg^2x = 1$, одакле је $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

Геометрија у равни

Троугао

За произвољан троугао чије странице имају дужине a, b, c, одговарајуће висине h_a, h_b, h_c, унутрашњи углови су α, β, χ а спољашњи углови $\alpha_1, \beta_1, \chi_1$, важе следеће формуле:

$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ - (површина троугла)
$O = 2s = a + b + c$ - (обим троугла)
$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ - (Херонов образац)
$r = \frac{P}{s}$ - (полупречник уписаног круга у троугао)
$R = \frac{abc}{4P}$ - (полупречник описаног круга око троугла)
$a{:}\,b = h_b{:}\,h_a$ - (однос страница и висина у троуглу)
$\alpha + \beta + \chi = 180^\circ$ - (збир унутрашњих углова троугла)
$\alpha_1 + \beta_1 + \chi_1 = 360^\circ$ - (збир спољашњих углова троугла)
$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta + \chi$ - (однос унутр. и спољ. углова)
$\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\chi} = 2R$ - (Синусна теорема)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\alpha$ - (Косинусна теорема)

За правоугли троугао са хипотенузом **c** важе формуле:

$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ - (површина правоуглог троугла)

$c^2 = a^2 + b^2$ - (Питагорина теорема)

$r = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$ - (полупречник уписаног круга)

$R = \frac{c}{2} = t_c$ - (полупречник описаног круга)

Ако је троугао *једнакостраничан*:

$\alpha = \beta = \chi = 60° \Leftrightarrow a = b = c$

$O = 3a$ - (обим једнакостраничног троугла)

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - (површина једнакостраничног троугла)

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - (висина једнакостраничног троугла)

$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ - (полупречник уписаног круга)

$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ - (полупречник описаног круга)

Четвороугао

За *четвороуглове* важе следеће формуле:

$P = ab, O = 2(a + b)$ - (површина и обим правоугаоника)

$P = a^2 = \frac{d^2}{2}, O = 4a$ - (површина и обим квадрата)

$d = a\sqrt{2}$ - (дијагонала квадрата)

$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, r = \frac{a}{2}$ - (полупреч. опис. и упис. круга у квадрат)

$P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ - (површина ромба)

$r = \frac{h}{2}$ - (полупречник уписаног круга ромба)

$P = \frac{a+b}{2}h = mh$ - (површина трапеза)

$m = \frac{a+b}{2}$ - (средња линија трапеза)

$P = ah_a = bh_b$ - (површина паралелограма)

Правилан шестоугао

Правилан шестоугао могуће је поделити на шест једнакостраничних троуглова. За њега важе следеће формуле:

$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}, O = 6a$ - (површина и обим правилног шестоугла)

$R = a$ - (полупречник описаног круга)

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - (полупречник уписаног круга)

$d_1 = 2a$ - (дужа дијагонала правилног шестоугла)

$d_2 = 2h = a\sqrt{3}$ - (краћа дијагонала правилног шестоугла)

Правилан многоугао

Ако је n број страница правилног многоугла ($n \geq 3$), правилан многоугао је могуће поделити на n подударних троуглова и важе следеће формуле:

$P = nP_{\Delta}, O = na$ - (површина и обим правилног многоугла)
$S_n = (n-2)180^\circ$ - (збир унутрашњих углова)
$\alpha = \frac{S_n}{n}$ - (унутрашњи угао)
$d_n = n - 3$ - (број дијагонала из једног темена)
$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ - (укупан број дијагонала)

Круг

За круг полупречника r, са централним углом α, периферијским углом β, важи следеће:

$P = r^2\pi, O = 2r\pi$ - (површина и обим круга)
$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ - (дужина лука)
$P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{rl}{2}$ - (површина исечка)
$\alpha = 2\beta$ - (однос централног и периферијског угла)
$P_{kp} = \pi({r_1}^2 - {r_2}^2)$ - (површина кружног прстена)

28. Ако се број страница правилног многоугла повећа за 3, његов унутрашњи угао ће се повећати 27°. Одредити број страница многоугла.

Решење:

Означимо са n број страница правилног многоугла, а са Sn збир његових унутрашњих углова. Тада је $n \cdot \alpha = Sn$ и како је: $Sn = (n-2) \cdot 180^o$, то је: $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$. Према условима задатка $\frac{S_{n+3}}{n+3} = \alpha + 27$, одакле је: $\frac{(n+1)\cdot 180}{n+3} = \frac{(n-2)\cdot 180}{n} + 27$, тј. $27n^2 + 81n - 1080 = 0$, одакле је $n^2 + 3n - 40 = 0$. Како је је > 0 , то је једино решење $n = 5$.

29. Збир катета правоуглог троугла је 32. Ако се већа катета умањи за 5 cm, а мања повећа за 4 cm, површина се не мења. Одредити странице троугла.

Решење:

Нека су a и b катете правоуглог троугла. Из услова задатка добијамо систем једначина:

$$a + b = 32$$
$$\frac{1}{2}(a+4)\cdot(b-5) = \frac{1}{2}ab,$$

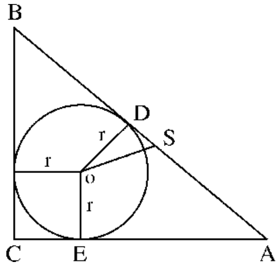
који је еквивалентан са системом:

$$a + b = 32$$
$$4b - 5a = 20 \quad (b > a),$$

одакле добијамо: $a = 12$ cm, $b = 20$ cm и $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 20^2} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34}$ cm.

30. Катете правоуглог троугла су 3 cm и 4 cm. Наћи растојање између центра уписаног и центра описаног круга.

Решење:



Како је $a = 3$cm и $b = 4$cm, то је $c = 5$cm. $R = \frac{1}{2}c = 2{,}5$cm и $r = s - c$, где је $S = \frac{a+b+c}{2} = 6$, па је $r = 1$cm. У правоуглом троуглу DOS је $x = DS = AD - AS = AD - \frac{c}{2} = AE - \frac{c}{2} = b - r - \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$, па је $OS^2 = OD^2 + DS^2 = r^2 + x^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ а $OS = \frac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

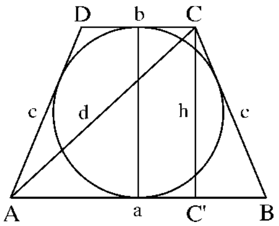
31. Страница ромба је $a = 9$ cm, а збир дијагонала $d_1 + d_2 = 24$ cm. Одредити површину ромба.

Решење:

Како је: $a^2 = \frac{d_1^2+d_2^2}{4} \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 4 \cdot 81 = 324$.
Из једнакости: $(d_1 + d_2)^2 = 24^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 \cdot d_2 = 576$, добија се: $d_1 \cdot d_2 = \frac{576-324}{2} = 126$.
Како је површина ромба $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, то је $P = \frac{126}{2} = 63$ cm^2.

32. Око круга полупречника $r = 1{,}5$ cm описан је једнакокраки трапез површине $P = 15$ cm^2. Израчунати дужину дијагонале овог трапеза.

Решење:



Нека су a и b основице трапеза и h висина трапеза. Приметимо да је $2r = h$, $h = 3$. Како је $P = \frac{a+b}{2}h \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{P}{h} = \frac{15}{3} = 5$. Из правоуглог троугла $AC'C$ добијамо: $d^2 = x^2 + h^2$, $x = |AC'| = a - \left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$, па је $d^2 = 5^2 + 3^2$, $d^2 = 34 \Rightarrow d = \sqrt{34}$ cm.

Геометрија у простору

За израчунавање површина и запремина рогљастих и обртних тела са базом (површином основе) B, висином H, омотачем M, полупречником основе обртних тела r и изводницом обртних тела s, неопходне су следеће формуле:

$P = 2B + M, V = BH$ - (површина и запремина призме)
$P = B + M, V = \frac{1}{3}BH$ - (површина и запремина пирамиде)
$P = B_1 + B_2 + M$ - (површина зарубљене пирамиде)
$V = \frac{1}{3}H\left(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right)$ - (запремина зарубљене пирамиде)
$P = 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi H$ - (површина ваљка)
$V = BH = r^2\pi H$ - (запремина ваљка)
$P = B + M = r^2\pi + r\pi s$ - (површина купе)
$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H$ - (запремина купе)
$P = B_1 + B_2 + M = {r_1}^2\pi + {r_2}^2\pi + (r_1 + r_2)\pi s$ - (повр. зарубљене купе)
$V = \frac{1}{3}H\left(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right) = \frac{H\pi}{3}\left({r_1}^2 + r_1r_2 + {r_2}^2\right)$ - (запр. заруб. купе)
$P = 4r^2\pi, V = \frac{4}{3}r^3\pi$ - (површина и запремина лопте)

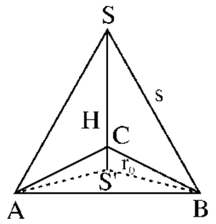
33. Димензије правоуглог паралелопипеда односе се као 2:3:6, а његова дијагонала је 35 cm. Израчунати запремину паралелопипеда.

Решење:

Из $a:b:c = 2:3:6 \;\Rightarrow\; a = 2k, b = 3k$ и $c = 6k$. Како је $D^2 = a^2 + b^2 + c^2, D^2 = (2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2, D^2 = 49k^2, D = 7k, 35 = 7k \Rightarrow k = 5$. Одатле је $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 30$ cm, па је $V = a \cdot b \cdot c, V = 10 \cdot 15 \cdot 30$, $V = 4500$ cm^3.

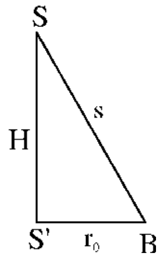
34. Одредити запремину правилне тростране пирамиде чија је основна ивица $a = 3\sqrt{3}$ cm, а бочна ивица $s = 5$ cm.

Решење:



Како је $r_o = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 3$ cm и

$$H^2 = s^2 - r_o^2,$$
$$H^2 = 5^2 - 3^2,$$
$$H^2 = 16,$$
$$H = 4 \text{ cm},$$



па је:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H,$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4,$$
$$V = 9\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

35. У тространу призму чије су основне ивице $a = 13$ cm, $b = 14$ cm и $c = 15$ cm уписан је и око ње описан ваљак. Наћи однос запремина та два ваљка.

Решење:

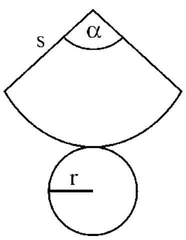
Означимо са r_u полупречник основе уписаног ваљка, са r_o полу-пречник основе описаног ваљка и површину основе призме са P. Према Хероновом обрасцу: $P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, где је $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ cm, добија се $P = 84$ cm^2.

Како је: $P = r_u \cdot s \Rightarrow r_u = \frac{84}{21} = 4$ cm и $P = \frac{abc}{4r_o} \Rightarrow r_o = \frac{abc}{4P} = \frac{13\cdot14\cdot15}{4\cdot84} = \frac{65}{8}$,

добија се: $\frac{V_u}{V_o} = \frac{r_u^2\pi\cdot H}{r_o^2\pi\cdot H} = \frac{r_u^2}{r_o^2} = \frac{4^2}{\left(\frac{65}{8}\right)^2} = \frac{32^2}{65^2}$.

36. Када се омотач купе развије у равни добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Израчунати запремину купе.

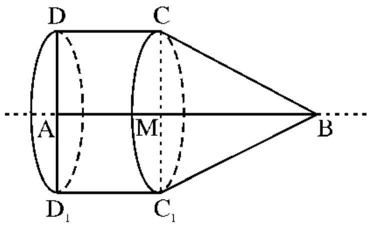
Решење:



Нека је s ивица купе, r полупречник основе и H висина купе. Тада из формуле $l = \frac{s\pi\alpha}{180}$ за дужину лука полупречника s и централног угла α и формуле $l = 2r\pi$ за обим основе кружне купе добија се $\frac{4\sqrt{5}\cdot\pi\cdot90}{180} = 2r\pi$, одакле је $r = \sqrt{5}$. Како је $H^2 = s^2 - r^2$, то је $H = 5\sqrt{3}$. Отуда је: $V = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \pi \cdot 5\sqrt{3}, V = \frac{25\pi}{\sqrt{3}}$.

37. Правоугли трапез основица $a = 10$ cm и $b = 2$ cm и $P = 90$ cm^2 ротира око веће основе. Израчунати површину и запремину насталог тела.

Решење:



Како је површина трапеза $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, то је $\frac{10+2}{2} \cdot h = 90$, и $h = 15$ cm, односно $|AD| = 15$ cm. Површина насталог тела је збир површине основе ваљка и омотача ваљка и купе, па је:

$$P = r^2\pi + 2r\pi \cdot H_1 + r\pi s = |AD|^2\pi + 2|AD| \cdot |AM| \cdot \pi + |AD| \cdot |BC| \cdot \pi.$$

Како је $|AM| = |DC|$, то је $|AM| = b = 2$cm.

Такође је $s = |BC|$ и $s^2 = |CM|^2 + |MB|^2 = |AD|^2 + (|AB| - |AM|)^2 = 15^2 + (10 - 2)^2 = 225 + 64 = 289.$

Дакле, $s = 17$, па је $P = 225\pi + 60\pi + 255\pi = 540\pi$cm^2.

Запремина насталог тела једнака је збиру запремина ваљка и купе, односно:

$$V = r^2\pi \cdot H_1 + \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H_2 = r^2\pi \cdot b + \frac{1}{3}r^2\pi \cdot (a - b) = 450\pi + \frac{1}{3}1800\pi = 1050\pi \text{ cm}^3.$$

Аналитичка геометрија у равни

Ако појмове геометрије у равни представимо у Декартовом координатном систему, основни појам - тачку посматрамо као уређени пар њених координата $M_1(x_1, y_1)$, тада важе следеће формуле:

$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ - (растојање између две тачке)

$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ - (средиште дужи M_1M_2)

$T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ - (тежиште троугла чија су темена тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))

$P_\Delta = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ - (површина троугла чија су темена тачке (x_1, y_1),(x_2, y_2),(x_3, y_3))

$y = kx + n$ - (експлицитни облик једначине праве, k –правац праве, n –одсечак на Yоси)

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - (једначина праве кроз једну тачку)

$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$ - (једначина праве кроз две тачке)

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$- (сегментни облик једначине праве, p –одсечак на Xоси, q –одсечак на Yоси)

$Ax + By + C = 0$ - (имплицитни облик једначине праве)

$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ - (растојање тачке од праве)

$tg\phi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ - (угао између две праве)

$k_1k_2 = -1$ - (услов нормалности две праве)

$k_1 = k_2$ - (услов паралелности две праве)

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ - (једначина кружнице са центром (p, q) и полупречником r)

$x^2 + y^2 = r^2$ - (једначина централне кружнице)

$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$ - (услов додира праве и кружнице)

$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2$ - (тангента у тачки круга)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - (једначина елипсе, са фокусима $F_{1,2}=(\pm e,0)$)
$e^2=a^2-b^2$ - (ексцентрицитет елипсе)
$a^2k^2+b^2=n^2$ - (услов додира праве и елипсе)
$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ - (тангента у тачки елипсе)
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - (једначина хиперболе, са фокусима $F_{1,2}=(\pm e,0)$)
$e^2=a^2+b^2$ - (ексцентрицитет хиперболе)
$a^2k^2-b^2=n^2$ - (услов додира праве и хиперболе)
$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ - (тангента у тачки хиперболе)
$y^2=2px$ - (једначина параболе, са фокусом $F\left(\frac{p}{2},0\right)$)
$2kn=p$ - (услов додира праве и параболе)
$y_0y=p(x+x_0)$ - (тангента у тачки параболе)

38. Одредити m тако да права $mx+y-5=0$ додирује елипсу $9x^2+16y^2=144$.

Решење:
Права $y=kx+n$ додирује елипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је $a^2k^2+b^2=n^2$. Како се дата права може записати у облику $y=-mx+5$, а елипса у облику $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ то услов додира постаје $4^2\cdot(-m)^2+3^2=5^2$, одакле је $m^2=1$ па је $m=\pm 1$.

39. Одредити једначину кружнице која је концентрична са кружницом $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ и садржи тачку $M(1,-4)$.

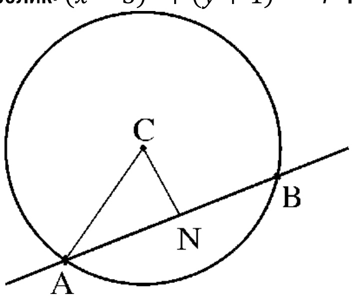
Решење:

Једначину дате кружнице можемо записати у облику: $(x+3)^2+(y+1)^2=5$, одакле видимо да је центар кружнице тачка $C(-3,-1)$. Из услова концентричности кружница, једначина тражене кружнице је: $(x+3)^2+(y+1)^2=R^2$.

Како тражена кружница садржи *M*, то је $R^2=(1+3)^2+(-4+1)^2=25$, па је једначина кружнице $(x+3)^2+(y+1)^2=25$.

40. Написати једначину круга са центром $C(3,-1)$, који на правој $2x-5y+18=0$ одсеца тетиву дужине 6.

Решење:
Једначина круга са центром у тачки C има облик: $(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$.



Тачка C, подножје нормале из C на дату праву и крајња тачка тетиве, одређују правоугли троугао ANC чија је хипотенуза полупречник круга r. Одстојање тачке C од праве је $d=\sqrt{29}$, па је $r^2=d^2+3^2=38$ и једначина круга: $(x-3)^2+(y+1)^2=38$.

Могући примери задатака за пријемни испит

ПРИМЕР 1

1. Упрошћен израз $\frac{(a+b)^2-4}{2a+2b+4}$ има облик:

   а) $\frac{2a}{a+b}$; б) $\frac{a+b}{2}-1$; в) $\frac{a+b+2}{2}$.

   Решење: б)

2. Решење једначине $3^{x+2}-4\cdot 3^{x+1}+3^{x-1}+24=0$ је:

   а) $x=2$; б) $x=-2$; в) $x=0$.

   Решење: а)

3. Ако је $cos\,\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi\leq\alpha\leq\frac{3\pi}{2}$ онда је $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ једнак:

   а) $\frac{1}{7}$; б) 7; в) $-\frac{1}{7}$.

   Решење: в)

4. Правилни многоугао чији један унутрашњи угао износи $172°$ је:

   а) 40-угао ; б) 45-угао.

   Решење: б)

5. Дијагонала правилне четворостране призме је 3, а однос ивице и висине је 2:1. Површина такве призме је:

   а) 8 ; б) 16 ; в) 10 .

   Решење: б)

ПРИМЕР 2

1. Решење неједначине $(x+4)m^2-(x+1)m+1>0$ за свако $m\in R$ је интервал:

   а) $x\in(-\infty,-4)$; б) $x\in(-4,+\infty)$; в) $x\in(-3{,}5)$.

   Решење: в)

2. Вредност израза $A=\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}log\,16}}$ је:

   а) 10 ; б) 5 ; в) 20 .

   Решење: в)

3. Решење једначине $3+10+17+\cdots+x=345$ је:

   а) 55 ; б) 66 ; в) 77 .

   Решење: б)

4. У правоуглом троуглу једна катета је 8 cm а друга је 2 cm краћа од хипотенузе. Површина тог троугла је:

   а) 60 cm^2; б) 40 cm^2; в) 80 cm^2.

   Решење: а)

5. Угао под којим се из тачке $A(8{,}0)$ види елипса $3x^2+y^2=48$ је:

   а) $45°$; б) $90°$; в) $0°$.

   Решење: б)

ПРИМЕР 3

1. Упрошћен израз $\frac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^3+1}\right)$ има облик:

а) $\frac{a+x}{1+x}$; б) $\frac{a}{x^3+1}$; в) a.

Решење: в)

2. Решење неједначине $-2 < \frac{-x^2+5x-7}{x-4} \leq 1$ је:

а) $1 \leq x < 3$; б) $-1 < x < 3$; в) $1 \leq x \leq 3$.

Решење: в)

3. Ако је $sin\,\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ онда је $cos(\alpha - \frac{\pi}{3})$ једнак:

а) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$; б) $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$; в) $\frac{3}{4}$.

Решење: б)

4. Ако се број страница конвексног многоугла повећа за 5, онда се број дијагонала многоугла повећа за 45. Број страница које има првобитни многоугао је:

а) 8 ; б) 10 ; в) 12 .

Решење: а)

5. Вредност параметра m која обезбеђује да кружница $(x-2m)^2 + (y-m)^2 = 25$ пролази кроз тачку $N(6{,}4)$ је:

а) $m = 1$; б) $m = \frac{27}{5}$; в) $m = 1$ или $m = \frac{27}{5}$.

Решење: в)

ПРИМЕР 4

1. Решење једначине $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ је:

а) $\sqrt{2}, 1$; б) $\pm\sqrt{2}, 1$; в) $\pm\sqrt{2}, \pm 1$.

Решење: в)

2. Вредност израза $A = 49^{1-log_7 2} + 5^{-log_5 4}$ је:

а) $\frac{25}{4}$; б) $\frac{25}{2}$; в) $\frac{25}{3}$.

Решење: б)

3. У аритметичком низу за који је $a_1 = 45, n = 31, S_n = 0$ важи да је:

а) $a_n = -45, d = -3$; б) $a_n = -45, d = 3$; в) $a_n = -45, d = 0$.

Решење: а)

4. Дужине двеју страница троугла су 6 и 9. Једна од висина које одговарају тим страницама је за 5 дужа од друге. Дужине тих висина су:

а) $10{,}12$; б) 10 , 15; в) 12 , 15.

Решење: б)

5. Права четворострана призма чија је основа ромб са дијагоналама 7,2 и 5,4 има висину једнаку основној ививци призме. Површина такве призме је:

а) 119,88 ; б) 120 ; в) 102,08 .

Решење: а)

ПРИМЕР 5

1. Ако је $A=\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$ а $B=\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+b^{-2})^{-1}$, онда је $A-B^{-1}$ једнако:

а) $\frac{a+b}{ab}$; б) 1; в) 0.

Решење: в)

2. Решење једначине $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$ је:

а) 0 или 1; б) $-\frac{1}{2}$или 0; в) 0 или $\frac{1}{2}$.

Решење: в)

3. Ако је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ тада је $(1+tg\alpha)(1+tg\beta)$ једнако:

а) -2; б) 2; в) 0.

Решење: б)

4. Површина ромба чије се дијагонале разликују за 8 не мења се ако се краћа дијагонала продужи за 3, а дужа скрати за 4. Дужине тих дијагонала су:

а) $12{,}20$; б) 20 , 28; в) 6 , 14.

Решење: а)

5. Једначина кружнице која је концентрична са кружницом $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ и пролази кроз тачку $N(1,-4)$ је:

а) $(x+3)^2+(y+1)^2=25$; б) $(x-3)^2+(y-1)^2=25$; в) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$.

Решење: а)

ПРИМЕР 6

1. Вредност параметра p тако да једно решење једначине $4x^2-15x+\frac{p^3}{2}=0$ буде квадрат другог решења је:

а) -5 или 2; б) 3 или -5; в) -3 или 2.

Решење: б)

2. Вредност израза $A=10^{1-log\,5}+10^{2-log\,20}-10^{3-log\,500}$ је:

а) 5; б) 10; в) 15.

Решење: а)

3. Први члан геометријског низа је $a_1=1$. Збир трећег и петог члана је 90. Такав низ има количник једнак:

а) $q=\pm9$; б) $q=\pm3$; в) $=\pm\frac{1}{3}$.

Решење: б)

4. Ако је збир унутрашњих углова многоугла $720°$, онда је број дијагонала тог многоугла једнак:

а) 6 ; б) 3 ; в) 9 .

Решење: в)

5. Површина призме, чија је висина 10, основа једнакокраки трапез основица 16 и 10 и са растојањем између основица 4, једнака је:

а) 436; б) 434; в) 464.

Решење: в)

ПРИМЕР 7

1. Вредност параметра m тако да збир квадрата решења једначине $(m+1)x^2-2mx+m-1=0$ буде $\frac{10}{9}$ је:

а) $\frac{1}{2}$ или 2; б) -2 или $\frac{1}{2}$; в) -$\frac{1}{2}$ или 2.

Решење: а)

2. Решење једначине $3\,log\,x+\frac{1}{2}log\,a=3\,log\,b+log\,c$ је:

а) $x=\frac{b\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{a}}$; б) $x=\sqrt[3]{\frac{bc}{a}}$; в) $x=\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}$.

Решење: а)

3. Три броја, чији је збир 57, који чине геометријски низ и за које важи да је средњи члан $\frac{6}{13}$ од збира суседних, су:

а) 10, 20, 27; б) 12, 18, 29; в) 12, 18, 27.

Решење: в)

4. У трапезу је средња линија 2 пута дужа од једне основице и за 7,5 дужа од половине друге основице. Дужине тих основица су:

а) 30 и 45; б) 15 и 30; в) 15 и 45.

Решење: в)

5. Услов да права $Ax+y-5=0$ додирује елипсу $9x^2+16y^2=144$ је да параметар A има вредност:

а) $A=\pm1$; б) $A=\pm2$; в) $A=0$.

Решење: а)

ПРИМЕР 8

1. Упрошћен облик израза $A=\frac{ab^{-2}\cdot(a^{-1}b^{2})^{4}\cdot(ab^{-1})^{2}}{a^{-2}b\cdot(a^{2}b^{-1})^{3}\cdot a^{-1}b}$ за $a=10^{-3}, b=10^{-2}$ има вредност једнаку:

а) 10; б) 100; в) 1000.

Решење: б)

2. Решење једначине $\sqrt[x]{64}-5\cdot\sqrt[x]{2^{x+3}}+16=0$ је:

а) 2 или 8; б) 2 или 1; в) 1 или 3.

Решење: в)

3. Вредност израза $A=cos^2 18°+cos^2 36°+cos^2 54°+cos^2 72°$ је:

а) 1; б) 2; в) 0.

Решење: б)

4. Ако је број дијагонала многоугла једнак 20, онда је збир унутрашњих углова тог многоугла једнак:

а) $1000°$; б) $1080°$; в) $1120°$.

Решење: б)

5. Дужина бочне ивице правилне шестостране пирамиде је два пута већа од основне ивице. Ако је висина пирамиде $4\sqrt{3}$, онда је њена запремина :

а) 100 ; б) 96 ; в) 80 .

Решење: б)

ПРИМЕР 9

1. Вредност параметра m тако да решења једначине $2x^2+5x+2m^2-4m+2=0$ задовољавају услов $x_1-2x_2=-1$ је:

а) 0; б) 2; в) 0 или 2.

Решење: в)

2. Ако је $log_{25}7=a$ и $log_2 5=b$, онда је $log_{\sqrt[3]{5}}6,125$ једнак:

а) $12a-\frac{9}{b}$; б) $12a+\frac{9}{b}$; в) $12a-\frac{b}{9}$.

Решење: а)

3. Тринаести члан аритметичког низа -2, -6, -10,... је:

а) 50; б) -26; в) -50.

Решење: в)

4. Ако је укупан број дијагонала многоугла једнак 20, онда је број дијагонала које полазе из једног темена тог многоугла једнак:

а) 4; б) 5; в) 6.

Решење: б)

5. Површина осног пресека ваљка је 16. Ако је полупречник ваљка два пута већи од висине, онда је површина тог ваљка :

а) 32π; б) 36π ; в) 48π .

Решење: в)

ПРИМЕР 10

1. Упрошћен израз $\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$ има вредност једнаку:

а) $2b$; б) $2a$; в) $2a+2b$.

Решење: а)

2. Решење једначине $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=10$ је:

а) $\pm\mathbf{1}$; б) ±2; в) ±3.

Решење: б)

3. Упрошћен израз $\frac{1+tg^4x}{tg^2x+ctg^2x}$ има облик:

а) tg^2x; б) ctg^2x ; в) tg^4x.

Решење: а)

4. У једнакокраком троуглу збир трећине угла при врху и половине једног од углова на основици износи $48°$. Углови тог троугла су:

а) $36°, 36°, 108°$; б) $72°, 72°, 36°$; в) $30°, 30°, 120°$.

Решење: б)

5. Услов да права $2x+y+m=0$ буде тангента кружнице $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ је да параметар $\boldsymbol{m}$ има вредност:

а) $m=-3-2\sqrt{5}$; б) $m=-3\pm2\sqrt{5}$; в) $m=-3+2\sqrt{5}$.

Решење: б)

ПРИМЕР 11

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}+\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}$ је:

а) $1-\sqrt{7}$; б) $1+\sqrt{7}$; в) $(1+\sqrt{7})^2$; г) 25 ; д) 0.

Решење: г)

2. Ако је $log_5 2 = a, log_5 3 = b$ тада је $log_{45} 100$ једнак:

а) $\frac{2a+2}{2b+1}$; б) $\frac{b+1}{a+2}$; в) $a-b$; г) $\frac{20}{9}$; д) ни један од ових одговора.

Решење: а)

3. Израз $\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x}$ идентички је једнак:

а) $\cos(x-\frac{\pi}{4})$; б) $\frac{\cos x+\sin x}{2}$; в) $\sin(x-\frac{\pi}{4})$; г) 1; д) 0.

Решење: б)

4. Бројеви a_1, a_2, a_3 чине геометријску прогресију. Ако је $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 343$ и $a_2 - a_1 = 5$ тада је $a_1 + a_2 + a_3$ једнако:

а) 7 ; б) $\frac{49}{2}$; в) $\frac{67}{2}$; г) $\frac{67}{3}$; д) 100 .

Решење: в)

5. Запремина правилне тростране пирамиде чија је основна ивица $a = 3\sqrt{3}$ и бочна ивица $s = 5$ једнака је:

а) 4 ; б) $9\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{3}$; г) 36 ; д) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Решење: б)

ПРИМЕР 12

1. Ако је $a \in R \setminus \{1\}$ тада је израз $\frac{4a^2+9a+5}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{6}{1-a}$ једнак:

а) $\frac{a+1}{a-1}$; б) 6 ; в) $\frac{12}{a-1}$; г) a^2; д) $1+a^2$.

Решење: в)

2. Збир корена једначине $4x^2+5-8x=0$ једнак је:

а) 8 ; б) -5 ; в) $-\frac{5}{4}$; г) -2 ; д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

3. Укупан број дијагонала правилног многоугла чији је унутрашњи угао три пута већи од суседног спољашњег угла је:

а) 20 ; б) 44 ; в) 18 ; г) 54 ; д) 28 .

Решење: а)

4. Правоугли троугао чија је хипотенуза 13 cm и једна катета 12 cm ротира око те катете. Запремина тако насталог тела једнака је:

а) 90π cm^3; б) $100\pi\ cm^3$; в) 314 cm^3; г) $\frac{25}{3}\pi$; д) 100 cm^3.

Решење: б)

5. Једначина тангенте повучена из тачке $A(6,8)$ на параболу $y^2 = 8x$ једнака је:

а) $y = 2x+1$; б) $x+y+2=0$; в) $\frac{1}{3}x+y=3$;

г) $x-y-2=0$; д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

ПРИМЕР 13

1. Ако је $x = \left(\frac{2}{a-1}\right)^{-1}$ тада је вредност израза $\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{2x-1}{x}\right)$ једнака:

а) $\frac{1+a}{1-a}$; б) 0 ; в) $\frac{1-a}{1+a}$; г) $a-1$; д) 1 .

Решење: а)

2. Решење једначине $3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192$ је:

а) 1 ; б) 0 ; в) -2 ; г) $\frac{1}{2}$; д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

3. Израз $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$ за $\alpha \neq k\pi$ идентички је једнак:

а) $tg^2\frac{\alpha}{2}$; б) $ctg\alpha$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $sin\frac{\alpha}{2}$; д) 0 .

Решење: а)

4. Збир првих 50 чланова аритметичког низа је 200, а збир следећих 50 чланова је 2700. Први члан низа је:

а) 3 ; б) 122; в) -21,5; г) -20,5; д) 3,5 .

Решење: г)

5. Полупречник лопте увећан је за 50%. Тада се површина лопте повећава за:

а) 50% ; б) 100% ; в) 25% ; г) 225% ; д) 125% .

Решење: д)

ПРИМЕР 14

1. Збир $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-1} + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$ једнак је:

а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; г) 3 ; д) 0 .

Решење: б)

2. Ако су x_1, x_2 решења једначине $3x^2 - x - 7 = 0$ тада је $x_1{}^3 \cdot x_2{}^3$ једнако:

а) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$; б) $\frac{193}{27}$; в) $-\left(\frac{7}{3}\right)^3$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; д) $\left(\frac{7}{3}\right)^3$.

Решење: в)

3. Ако је полупречник описане кружнице око једнакостраничног троугла $R = 2\sqrt{3}$, тада је површина тог троугла једнака:

а) 36 ; б) $9\sqrt{3}$; в) 12 ; г) 27 ; д) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Решење: б)

4. Ако је површина базе правилне четворостране пирамиде 144 cm^2 а површина омотача 192 cm^2, тада је збир свих ивица те пирамиде једнак:

а) 88 cm; б) 12 cm; в) 40 cm; г) 48 cm; д) 20 cm.

Решење: а)

5. Једначина праве која пролази кроз пресек правих $x + y - 1 = 0$ и $2x - y - 5 = 0$ и нормалана је са правом $3x - y - 2 = 0$ гласи:

а) $y = 3x - 1$; б) $x + y + 2 = 0$; в) $y = \frac{1}{3}x + 3$; г) $x + 3y + 1 = 0$; д) $y = 3x + 1$.

Решење: г)

ПРИМЕР 15

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{a-3b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{6b}{a^2-9b^2}\right):\frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$ за $a=0{,}003$и $b=5{,}994$ једнака је:

а) -2; б) $6{,}124$; в) $5{,}997$; г) 2 ; д) $-1{,}2$.

Решење: г)

2. Производ решења једначине $\sqrt{x^2-9}+x^2-9=20$ је:

а) 25 ; б) 0 ; в) - 25 ; г) 1 ; д) 20 .

Решење: в)

3. Решења једначине $sin\,x+cos\,2\,x=1$ су:

а) $x=k\pi$; б) $x_1=k\pi, x_2=\frac{\pi}{6}+2k\pi, x_3=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$;

в) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; г) $x=2k\pi$; д) $x=\frac{k\pi}{2}$.

Решење: б)

4. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 54. Ако је највећи од њих два пута већи од најмањег, тада је производ та три броја једнак:

а) 2000 ; б) 5184; в) 9832 ; г) 368 ; д) 1154.

Решење: б)

5. Обим већег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је 22 cm. Висина призме је за 1 cm краћа од основне ивице. Запремина те призме је:

а) 72 cm³; б) $72\sqrt{3}$ cm³; в) 64 cm³; г) 72π cm³; д) $48\sqrt{3}$ cm³.

Решење: б)

ПРИМЕР 16

1. Ако је $f(1-x)=3-2x$ тада је $f(x)$ једнако:

а) $2x+1$; б) $8-x$; в) $2x+3$; г) $1-x$; д) $x+3$.

Решење: а)

2. Скуп решења неједначине $\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}\geq 1$ је :

а) $(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$; б) $(-1,+\infty)$; в) $(3,+\infty)$; г) $(-1{,}3)$; д) $(-1{,}3)\cup(3,+\infty)$.

Решење: д)

3. Решења једначине $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ су:

а) $x_1=4, x_2=8$; б) $x=3$; в) $x_1=3, x_2=9$; г) $x_1=3, x_2=11$; д) $x_1=11, x_2=15$.

Решење: г)

4. Тетива круга је за 2 cm мања од пречника, а одстојање центра круга од тетиве је за 2 cm мање од полупречника. Дужина тетиве је:

а) 5 cm; б) 8 cm; в) 12 cm; г) 1 cm; д) 10 cm.

Решење: б)

5. Једначина круга чији је центар тачка $C(0{,}4)$ и садржи тачку $(5,-8)$ је:

а) $x^2+(y-4)^2=144$; б) $x^2+(y-4)^2=169$;

в) $(x-4)^2+y^2=169$; г) $(x-5)^2+(y+8)^2=10$.

Решење: б)

ПРИМЕР 17

1. Вредност израза $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$ једнака је:

а) -1; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) $\sqrt{3}+3$; д) $\sqrt{3}+2$.

Решење: в)

2. Збир решења једначине $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=\sqrt{2x-8}$ је:

а) 10 ; б) 12 ; в) 14 ; г) 0 ; д) 1 .

Решење: в)

3. Скуп решења неједначине $\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right|<1$ је :

а) $(0,+\infty)$; б) $(-\infty,0)$; в) $(3,4)$; г) $(-2,3)$; д) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Решење: б)

4. Количник геометријског низа који се састоји од шест чланова, чији је збир прва три члана 168, а збир последња три 21, је :

а) 2 ; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) -2 .

Решење: б)

5. Висина купе је 12 cm, а површина осног пресека је 42 cm^2. Површина те купе је:

а) 56π cm^2; б) 49π cm^2 ; в) 56 cm^2 ; г) 49 cm^2 ; д) 36π cm^2.

Решење: а)

ПРИМЕР 18

1. Производ решења једначине $|3x-2|+x=2$ је:

а) 1; б) 0; в) 2; г) -1; д) -2 .

Решење: б)

2. Решења једначине $sin\frac{x}{2}+cos\,x=1$ су:

а) $x=k\pi$; б) $x_1=2k\pi, x_2=\frac{\pi}{3}+4k\pi, x_3=\frac{5\pi}{3}+4k\pi$;

в) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; г) $x=2k\pi$; д) $x=\frac{k\pi}{2}$.

Решење: б)

3. Решење једначине $25^{\sqrt{x}}-124\cdot5^{\sqrt{x}}=125$ је:

а) $x_1=-3, x_2=3$; б) $x=9$; в) $x_1=3, x_2=5$;

г) $x_1=4, x_2=5$; д) ни један од ових одговора .

Решење: б)

4. Хипотенуза c и катета a правоуглог троугла су узастопни природни бројеви. Квадрат друге катете је:

а) $c\cdot a$; б) $\frac{c}{a}$; в) $c+a$; г) $c-a$; д) ни један од ових одговора.

Решење: в)

5. Координате центра и полупречник круга чија је једначина $x^2+y^2-4y-21=0$ су:

а) $C(0,0), r=25$; б) $C(2,2), r=5$; в) $C(0,2), r=5$;

г) $C(0,2), r=25$; д) ни један од ових одговора .

Решење: в)

ПРИМЕР 19

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}$ једнака је:

а) 6 ; б) $\frac{1}{2}$; в) 4; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}+2$.

Решење: а)

2. Ако m људи ураде један посао за d дана, тада ће $m+r$ људи урадити тај исти посао за :

а) $d+r$ дана ; б) $d-r$ дана ; в) $\frac{md}{m+r}$ дана ;

г) $\frac{d}{m+r}$ дана ; д) $\frac{d}{m-r}$ дана .

Решење: в)

3. Производ решења једначине $\boldsymbol{log_x 3 + log_3 x = log_{\sqrt{x}} 3 + log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}}$ је:

а) 9 ; б) 3 ; в) $\frac{1}{3}$; г) 27 ; д) -2 .

Решење: б)

4. Почетна три члана аритметичког низа су $x-1, x+1{,}2x+3$ и то у датом редоследу. Тада је x једнако:

а) 2 ; б) 0; в) -2; г) 4; д) ни један од ових одговора.

Решење: б)

5. Растојање центра кружнице $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ од тачке $M(-1{,}2)$ је:

а) -1; б) 1; в) 2; г) $\sqrt{2}$; д) 0 .

Решење: д)

ПРИМЕР 20

1. Ако се израз $\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$, под условима $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$, сведе на најпростији случај, добија се:

а) a^2; б) $\frac{a}{b}$; в) $a-2b$; г) $\frac{a^2-2b^2}{ab}$; д) b^2 .

Решење: б)

2. Корени једначине $3(m-1)x^2-4(m-1)x+2m-1=0$ задовољавају услов $x_2=3x_1$ за :

а) $m=3$; б) $m=0$; в) $m=\frac{3}{2}$; г) $m=\frac{4}{3}$; д) $m=1$.

Решење: б)

3. Вредност израза $\frac{\cos 2\alpha-\cos\alpha}{\sin(\alpha+15°)+\sin\alpha}$ за $\alpha=30°$ је:

а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-1$; в) $\sqrt{6}+2$.

Решење: б)

4. Ако дужу страницу правоугаоника повећамо за 10% а другу смањимо за 10%, тада се површина правоугаоника:

а) смањи за 10%; б) повећа за 10%; в) не мења ;

г) смањи за 1% ; д) повећа за 1% .

Решење: г)

5. Запремина квадра чији је однос ивица $3:4:12$, а дијагонала $D=26$ cm, једнака је:

а) 1152 cm^3; б) 768 cm^3; в) 1156 cm^3; г) 1134 cm^3; д) 932 cm^3.

Решење: а)

РЕШЕНИ ЗАДАЦИ СА РАНИЈЕ ОДРЖАНИХ ПРИЈЕМНИХ ИСПИТА

2015.

Задатак 1.

У скупу целих бројева збир решења једначине $|2x-3|-|x+2|=3-x$ је:

А) 2 ; Б) 0 ; В) -1 ; Г) 3.

Решење:

Како је $|2x-3|=\begin{cases}2x-3, & x\geq\frac{3}{2}\\ 3-2x, & x<\frac{3}{2}\end{cases}$ и $|x+2|=\begin{cases}x+2, & x\geq-2\\ -2-x, & x<-2\end{cases}$, то x може припадати следећим интервалима $(-\infty$, -2) ; $\left[-2,\frac{3}{2}\right)$; $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$. Разликујемо три случаја: 1) $x<-2$, 2) -2$\leq x<\frac{3}{2}$, 3) $x\geq\frac{3}{2}$.

	$x<-2$	-2$\leq x<\frac{3}{2}$	$x\geq\frac{3}{2}$
$\lvert 2x-3\rvert$	$3-2x$	$3-2x$	$2x-3$
$\lvert x+2\rvert$	$-2-x$	$x+2$	$x+2$

1) За $x\in(-\infty,-2)$ дата једначина еквивалентна је једначини $3-2x-(-2-x)=3-x\Leftrightarrow 5-x=3-x$, па једначина у овом случају нема решења.

2) За $x\in\left[-2,\frac{3}{2}\right)$ дата једначина постаје $3-2x-(x+2)=3-x\Leftrightarrow 1-3x=3-x\Leftrightarrow -2x=2\Leftrightarrow x=-1$.

3) За $x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$$2x-3-(x+2)=3-x\Leftrightarrow x-5=3-x\Leftrightarrow 2x=8\Leftrightarrow x=4.$$

Дакле, $x=-1$ и $x=4$ су решења полазне једначине, па је збир решења -1+4=3.

Одговор: Г)

Задатак 2.

Ако је $\log 5=a$, $\log 3=b$, тада је $\log_{30}8$ једнако:

А) $\frac{3-3a}{b+1}$; Б) $\frac{2-2a}{b+1}$; В) $\frac{3+3a}{b+1}$; Г) $\frac{2-2b}{a+1}$.

Решење:

На основу особина логаритама добија се:

$$\log_{30}8=\frac{\log 8}{\log 30}=\frac{\log 2^3}{\log 3\cdot 10}=\frac{3\log 2}{\log 3+\log 10}=\frac{3\log\frac{10}{5}}{\log 3+\log 10}=\frac{3\cdot(\log 10-\log 5)}{\log 3+\log 10}=\frac{3\cdot(1-a)}{b+1}=\frac{3-3a}{b+1}$$

Одговор: А)

Задатак 3.

Вредност израза $\left(1-\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{\pi}{12}\right)$ је:

А) 2 ; Б) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; Г) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Решење:

Користећи формулу за разлику квадрата и одговарајуће тригонометријске идентитете добија се:

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{\pi}{12}\right)=1-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Одговор: Г)

Задатак 4.
Збир прва четри члана аритметичког низа једнак је 2, а следећа 4 једнак је 18. Број чланова овог низа које треба сабрати да би се добио збир 35 је:

А) 10 ; Б) 14 ; В) 20 ; Г) 16.

Решење:

Према условима задатка $S_4 = 2$ и $S_8 = S_4 + 18 = 20$. Из формуле за збир првих n чланова аритметичког низа $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ и датих услова добија се следећи систем линеарних једначина $\frac{4}{2}(2a_1 + (4-1)d) = 2 \wedge \frac{8}{2}(2a_1 + (8-1)d) = 20$ тј. $4a_1 + 6d = 2 \wedge 8a_1 + 28d = 20$. Овај систем има решења $a_1 = -1$ и $d = 1$. Ако је n број првих чланова низа чији је збир 35, онда је $\frac{n}{2}\big(-2 + (n-1)\big) = 35$, односно $n^2 - 3n - 70 = 0$. Решавањем квадратне једначине добија се $n = 10$.

Одговор: А)

Задатак 5.
Ако су $AB = c$, $AC = b$, две странице троугла *ABC* и збир висина h_c и h_b једнак је трећој висини h_a $(h_a = h_c + h_b)$, тада је страница *a* овог троугла једнака:

А) $\frac{bc}{b+c}$; Б) $\frac{b}{b+c}$; В) $\frac{c-b}{bc}$; Г) $\frac{c+b}{b}$.

Решење:

Како је површина троугла $= \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, то је $h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}$ и како за висине овог троугла важи $h_a = h_c + h_b$ добија се $\frac{2P}{a} = \frac{2P}{c} + \frac{2P}{b}$, одакле следи $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{b+c}{cb}$, те је $a = \frac{bc}{b+c}$.

Одговор: А)

2016.

Задатак 1.
Вредност израза $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \left(\frac{x-4}{2x-5}\right)^{-1}\right) \div \frac{5}{x-4}$ је:

а) 2 б) $x+2$ в) $2x$ г) 1

Решење:

За $x \geq 0, x \neq 4$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \left(\frac{x-4}{2x-5}\right)^{-1}\right) \div \frac{5}{x-4} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2x-5}{x-4}\right) \div \frac{5}{x-4}$$
$$= \left(\frac{x - 2\sqrt{x} + x + 2\sqrt{x} - 2x + 5}{x-4}\right) \cdot \frac{x-4}{5} = \frac{5}{x-4} \cdot \frac{x-4}{5} = 1$$

Одговор: Г)

Задатак 2.
Једначина $\sin\frac{x}{6} + \cos\frac{x}{3} = 1$ има на интервалу $[0, 2\pi)$

а) два решења б) три решења в) пет решења г) нема решења

Решење:

$$\sin\frac{x}{6} + \cos\frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6} = 1 - \cos\frac{x}{3} \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6} = 2\sin^2\frac{x}{6} \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6}\left(2\sin\frac{x}{6} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6} = 0 \vee \sin\frac{x}{6} =$$

$\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = k\pi \vee \frac{x}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{x}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = 6k\pi \vee x = \pi + 12k\pi \vee x = 5\pi + 12k\pi$

Како решење треба припадати интервалу $[0, 2\pi)$ то су решења x=0 и $x = \pi$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Бројеви $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 19)$, представљају три узастопна члана аритметичког низа за:

а) $x = 1$ б) $x = \log_2 3$ в) $x = \log_5 2$ г) $x = 3$

Решење:

Како је разлика два узастопна члана аритметичког низа константна то је:

$$\log(2^x + 1) - \log 3 = \log(2^x + 19) - \log(2^x + 1) \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{2^x + 1}{3}\right) = \log\left(\frac{2^x + 19}{2^x + 1}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{2^x+1}{3} = \frac{2^x+19}{2^x+1} \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 3 * (2^x + 19) \Leftrightarrow$$
$$(2^x)^2 + 2 * 2^x + 1 = 3 * 2^x + 57 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 56 = 0,$$

Након увођења смене $t = 2^x, t > 0$. Једначина се своди на $t^2 - t - 56 = 0$ чија су решења t_1=8 и t_2=-7. Како је $t > 0$ то је решење које задовољава услов t = 8, односно 2^x=8=2^3 одакле је x=3.

Одговор: Г)

Задатак 4.

Површина једнакостраничног троугла је $4\sqrt{3}\ cm^2$. Површина кружног прстена који граде описани и уписани круг тог троугла је:

а) $4\ \pi cm^2$. б) $12\ cm^2$ в) $16\sqrt{3}cm^2$ г) $64\pi\ cm^2$

Решење:

Означимо са a страницу троугла и h висину. Применом формуле за површину троугла $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, добија се: $4\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 16$, одакле је $a = 4cm$. Како је површина кружног прстена $P = (R^2 - r^2)\pi$ и $R = \frac{2}{3}h, r = \frac{1}{3}h$ заменом у формули за површину кружног прстена добија се $P = \left(\frac{4}{9}h^2 - \frac{1}{9}h^2\right)\pi = \frac{1}{3}h^2\pi$. Заменом $h = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3cm}$ добија се $P = 4\pi cm^2$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Једначине тангенте круга $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ које пролазе кроз пресек правих $x - 2y - 8 = 0$ и $y = 3x - 14$ су:

а) $y = 2x - 10$ и $2y + x = 0$ б) $y = x + 10$ и $y = 2x - 10$ в) $y - 2x = 10$ и $y = 2x + 10$ г) $y = x - 1$ и $y + 2x = 10$

Решење:

Права $y = kx + n$ додирује кружницу $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ако је испуњен услов додира $(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1)$. Једначина кружнице може се записати у облику:$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$. Центар ове кружнице је тачка $C = (1, -3)$, и полупречник $r = \sqrt{5}$. Решавањем система $x - 2y - 8 = 0$ и $3x - y - 14 = 0$ добија се пресечна тачк $P = (4, -2)$. Заменом у једначини тангенте $y = kx + n$ добија се $n = -4k - 2$ Из услова додира тангенте и кружнице добија се $(k + 3 - 2 - 4k)^2 = 5(k^2 + 1)$. Након сређивања претходне једначине добија се $4k^2 - 6k - 4 = 0$ Одакле је $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = 2$, а тражене једначине тангенти су: $y = 2x - 10$ и $2y + x = 0$

Одговор: А)

2017.

Задатак 1.

Збир решења једначине $\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{x^2+4x+4}=\mathbf{3}-\boldsymbol{x}$ је:

а) 2; б) $x+2$; в) $2x$; г) 3.

Решење:

$\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{x^2+4x+4}=3-x \Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)^2}-\sqrt{(x+2)^2}=3-x \Leftrightarrow |2x-3|-|x+2|=3-x$

Како је $|2x-3|=\begin{cases}2x-3, & x\geq\frac{3}{2}\\ 3-2x, & x<\frac{3}{2}\end{cases}$ и $|x+2|=\begin{cases}x+2, & x\geq-2\\ -2-x, & x<-2\end{cases}$, то x може припадати следећим интервалима $(-\infty$, -2) ; $\left[-2,\frac{3}{2}\right)$; $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$. Разликујемо три случаја:

1) $x<-2$, 2) -2≤ $\boldsymbol{x}<\frac{3}{2}$, 3) $\boldsymbol{x}\geq\frac{3}{2}$.

	$x<-2$	-2≤ $x<\frac{3}{2}$	$x\geq\frac{3}{2}$
$\lvert 2x-3\rvert$	$3-2x$	$3-2x$	$2x-3$
$\lvert x+2\rvert$	$-2-x$	$x+2$	$x+2$

1) За $x\in(-\infty,-2)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$3-2x-(-2-x)=3-x \Leftrightarrow 5-x=3-x$, па једначина у овом случају нема решења.

2) За $x\in\left[-2,\frac{3}{2}\right)$ дата једначина постаје

$$3-2x-(x+2)=3-x \Leftrightarrow 1-3x=3-x \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1.$$

3) За $x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$$2x-3-(x+2)=3-x \Leftrightarrow x-5=3-x \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4.$$

Дакле, $x=-1$ и $x=4$ су решења полазне једначине , па је збир решења -1+4=3.

Одговор: Г)

Задатак 2.

Ако је $\log 2=a$, $\log 7=b$, тада је $\log_5 9.8$ једнако:

а) $\frac{a+2b-1}{1-a}$; б) $\frac{2-2a}{b+1}$; в) $\frac{2-2b}{a+1}$; г) 1.96;

Решење:

На основу особина логаритама добија се:

$$\log_5 9.8=\frac{\log 9.8}{\log 5}=\frac{\log\frac{98}{10}}{\log\frac{10}{2}}=\frac{\log 98-\log 10}{\log 10-\log 2}=\frac{\log 2\cdot 49-1}{1-a}=\frac{\log 2+\log 49-1}{1-a}=\frac{a+\log 7^2-1}{1-a}=\frac{a+2\log 7-1}{1-a}=\frac{a+2b-1}{1-a}.$$

Одговор: А)

Задатак 3.

Вредност израза $\frac{\cos 81^\circ+\cos 71^\circ+\cos 21^\circ+\cos 11^\circ}{\sin 81^\circ+\sin 71^\circ-\sin 21^\circ-\sin 11^\circ}$ је:

а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\sqrt{3}$.

Решење:

Користећи формуле за трансформацију збира и разлике тригонометријских функција у производ добија се:

$$\frac{\cos 81^\circ + \cos 71^\circ + \cos 21^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ + \sin 71^\circ - \sin 21^\circ - \sin 11^\circ} = \frac{\cos 81^\circ + \cos 21^\circ + \cos 71^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ - \sin 21^\circ + \sin 71^\circ - \sin 11^\circ}$$
$$= \frac{2\cos\frac{81^\circ - 21^\circ}{2}\cos\frac{81^\circ + 21^\circ}{2} + 2\cos\frac{71^\circ - 11^\circ}{2}\cos\frac{71^\circ + 11^\circ}{2}}{2\sin\frac{81^\circ - 21^\circ}{2}\cos\frac{81^\circ + 21^\circ}{2} + 2\sin\frac{71^\circ - 11^\circ}{2}\cos\frac{71^\circ + 11^\circ}{2}}$$
$$= \frac{2\cos 30^\circ \cos 51^\circ + 2\cos 30^\circ \cos 41^\circ}{2\sin 30^\circ \cos 51^\circ + 2\sin 30^\circ \cos 41^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ(\cos 51^\circ + \cos 41^\circ)}{2\sin 30^\circ(\cos 51^\circ + \cos 41^\circ)}$$
$$= \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Одговор: Г)

Задатак 4.

Нумеричке вредности страница троугла су чланови аритметичког низа. Странице се разликују за $3cm$. Ако је обим тог троугла 36 cm, онда је површина кружног прстена који граде описани и уписани круг тог троугла

а) $\frac{189}{4}\ \pi cm^2$; б) $12\ cm^2$; в) $36\sqrt{3}cm^2$; г) $64\pi\ cm^2$.

Решење:

Нека су $a-d,\ a,\ a+d$ чланови аритметичког низа. Из услова задатка следи да је $d = 3$ и $a - d + a + a + d = 36$. Одатле је $a = 12$. Отуда су странице троугла $b = a - d = 9,\ a = 12,\ c = a + d = 15$ (у cm). С обзиром да су све три странице троугла познате површина се може израчунати помоћу Хероновог обрасца $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s = \frac{a+b+c}{2}$. Заменом одговарајућих вредности следи да је $P = 54cm^2$. Како је полупречнок уписаног круга $= \frac{P}{S} = \frac{54cm^2}{18cm} = 3cm$, а полупречник описаног круга $R = \frac{abc}{4P} = \frac{15}{2}cm$ то је површина кружног прстена $P = (R^2 - r^2)\pi = \frac{189}{4}\ \pi cm^2$.

Одговор: А)

Задатак 5.

У праву четворострану призму чија је основа једнакокраки трапез уписан је ваљак висине H=10 cm и пречника основе $R = 12cm$. Ако је крак трапеза $c = 15cm$, тада је запремина призме:

а) $1800cm^3$; б) $360cm^3$; в) $180cm^3$; г) $1440cm^3$.

Решење:

Како је ваљак уписан у призму, то је основа призме тангентни четвороугао, па су збирови наспрамних страница једнаки, тј. $a + b = 2c$, пречник основе ваљка једнак је висини основе призме $h = R = 12cm$. Површина основе призме $B_P = \frac{a+b}{2}h = 180cm^2$. Запремина призме $V_P = B_P \cdot H = 1800cm^3$.

Одговор: А)

2018.

Задатак 1.

Производ решења једначине $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ је:

а) 2 ; б) -2 ; в) -4 ; г) -16 .

Решење:

Дату једначину можемо записати и у следећем облику: $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 10$.

Како је $\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right) = 1$, то је $5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$. Коришћењем смене да је $t = \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}$, једначина добија облик: $t + \frac{1}{t} = 10$, односно, $t^2 - 10t + 1 = 0$.

Решења квадратне једначине су: $t_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ и $t_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Враћањем смене добија се:

$\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 5 - 2\sqrt{6} \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$;

$\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 5 + 2\sqrt{6} = \frac{1}{5-2\sqrt{6}} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{-1} \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = -1 \;\Rightarrow\; x_2 = -2$.

Производ решења једначине једнак је -4

Одговор: В)

Задатак 2.

Вредност израза $\frac{(cos^2 x - sin^2 x)(2 + sin\, 2x)}{cos^3 x - sin^3 x}$ једнака је:

а) $cos\, x + sin\, x$; б) $2(cos\, x + sin\, x)$; в) $cos^2 x + 1$; г) 2.

Решење:

Коришћењем формуле за разлику квадрата, разлику кубова и изражавањем синуса двоструког угла, дати израз је једнак:

$$\frac{(cos^2 x - sin^2 x)(2 + sin\, 2x)}{cos^3 x - sin^3 x} = \frac{(cos\, x - sin\, x)(cos\, x + sin\, x)\cdot 2(1 + sin\, x \cdot cos\, x)}{(cos\, x - sin\, x)(cos^2 x + cos\, x \cdot sin\, x + sin^2 x)}$$

Скраћивањем истих чинилаца и коришћењем основног тригонометријског идентитета

$sin^2 x + cos^2 x = 1$, добија се: $\frac{(cos\, x + sin\, x)\cdot 2(1 + sin\, x \cdot cos\, x)}{1 + sin\, x \cdot cos\, x} = 2\,(cos\, x + sin\, x)$

Одговор: Б)

Задатак 3.

Ако су: $log_7\left(16 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right)$, $\frac{x+1}{log_2 7}$ и $log_7\left(\frac{1}{32} \cdot 2^{\frac{5x}{3}+7}\right)$ прва три члана аритметичког низа, тада је x једнако:

а) 3; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{3}$.

Решење:

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и сређивањем степена истих основа, добија се:

$a_1 = log_7\left(16 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right) = log_7\left(2^4 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right) = log_7 2^{\frac{4x-1}{3}}$;

$a_2 = \frac{x+1}{log_2 7} = (x+1)\, log_7 2 = log_7 2^{x+1}$;

$a_3 = log_7\left(\frac{1}{32} \cdot 2^{\frac{5x}{3}+7}\right) = log_7 \frac{2^{\frac{5x}{3}+7}}{2^5} = log_7 2^{\frac{5x}{3}+2}$.

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, па је: $log_7 2^{x+1} - log_7 2^{\frac{4x-1}{3}} = log_7 2^{\frac{5x}{3}+2} - log_7 2^{x+1}$.

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$log_7 \frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = log_7 \frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}} \Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}}.$$

Сређивањем степена броја 2, добија се: $2^{2x+2} = 2^{\frac{9x+5}{3}} \Leftrightarrow 2x + 2 = \frac{9x+5}{3} \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Одговор: Г)

Задатак 4.

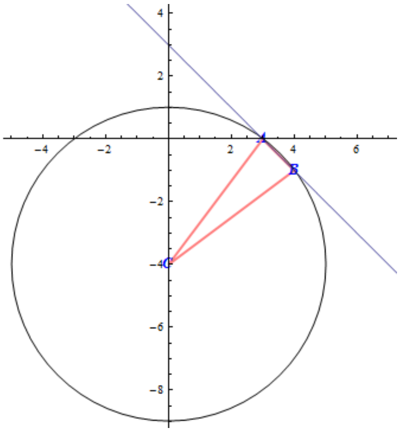
Обим и површина троугла који образују пресечне тачке праве $p\colon\; x + y - 3 = 0$ и кружнице $K\colon\; x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$ и центар дате кружнице је:

а) $O = 10 + \sqrt{2}$ $P = \frac{7}{2}$; б) $O = \frac{10-\sqrt{2}}{7}$ $P = \frac{-7}{2}$; в) $O = 10 - \sqrt{2}$ $P = \frac{2}{7}$; г) $O = 10 + \sqrt{2}\, cm$ $P = \frac{7}{2}\, cm^2$.

Решење:

Пресечне тачке праве и кружнице $(A$ и $B)$ добијамо решавањем система једначина: $x + y - 3 = 0$ и $x^2 + y^2 +$

$8y - 9 = 0$; $A(3,0)$ и $B(4,-1)$.



Троугао ABC је једнакокраки, јер је $AC = BC = r$. Свођењем једначине кружнице на општи облик, добија се: K: $x^2 + (y+4)^2 = 25$, па је центар кружнице тачка $C(0,-4)$, а полупречник $r = 5$. Тако су познате две странице троугла: $AC = BC = r = 5$. Трећу страницу AB можемо добити као растојање између две тачке: $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{2}$. Обим троугла једнак је: $O = 5 + 5 + \sqrt{2} = 10 + \sqrt{2}$.

Како су познате координате сва три темена троугла, површину троугла можемо израчунати преко формуле:

$$P = \frac{1}{2}\ |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \frac{7}{2}\ .$$

Одговор: А)

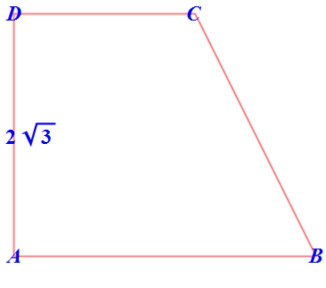
Задатак 5.

Површина тела које настаје ротацијом правоуглог трапеза $ABCD$ око мањег крака $D = 2\sqrt{3}\ cm$, ако је површина трапеза $P = 18\sqrt{3}\ cm^2$ и разлика основица трапеза $6cm$, једнака је:

а) $244\sqrt{3}\,\pi\ cm^2$; б) $(45 + 18\sqrt{3})4\,\pi\ cm^3$; в) $(180 + 72\ )\sqrt{3}\pi\ cm^2$; г)$(180 + 72\sqrt{3})\,\pi\ cm^2$.

Решење:

Правоугли трапез који ротира око мањег крака формира зарубљену купу, за коју важи да су полупречници основа једнаки основицама трапеза а висина зарубљене купе једнака је висини, односно, мањем краку трапеза. Површина зарубљене купе једнака је: $P = {r_1}^2\,\pi + {r_2}^2\,\pi + (r_1 + r_1)\pi\ s$.



Како је површина трапеза једнака: $P = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\ cm^2 \Rightarrow a + b = 18\ cm$.

Како је дата разлика основица $a - b = 6\ cm$, решавањем система добијамо основице, односно полупречнике основа:

$r_1 = a = 12\ cm \quad \Rightarrow \quad {r_1}^2\,\pi = 144\,\pi\ cm^2$,

$r_2 = b = 6\ cm \quad \Rightarrow \quad {r_2}^2\,\pi = 36\,\pi\ cm^2$.

Изводница купе добија се Питагорином теоремом: $s^2 = BC^2 = h^2 + (a-b)^2 = 48\ cm^2$, па је $s = 4\sqrt{3}\ cm$.

Површина зарубљене купе једнака је: $P = {r_1}^2\,\pi + {r_2}^2\,\pi + (r_1 + r_1)\pi\ s = 144\,\pi\ cm^2 + 36\,\pi\ cm^2 + 18cm\,\pi \cdot 4\sqrt{3}\ cm$, $P = (180 + 72\sqrt{3})\,\pi\ cm^2$.

Одговор: Г)

2019.

Задатак 1.

Упрошћен израз $\frac{x^2-x-1}{x-1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2-1}\right)$ има вредност:

а) $\frac{x+1}{x^2-x-1}$; б) 1 ; в) $\frac{x^2-x-1}{2}$; г) x .

<u>Решење:</u>

Уз услове да је $x+1\neq 0$ и $x-1\neq 0$, односно, $x\neq -1$ и $x\neq 1$, дати израз једнак је:

$$\frac{x^2-x-1}{x-1}:\left(\frac{1}{x+1}^{(\cdot(x-1)}+\frac{1}{x-1}^{(\cdot(x+1)}+\frac{2}{x^2-1}\right)=\frac{x^2-x-1}{x-1}:\frac{x-1+x+1+2}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2-x-1}{x-1}:\frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-x-1}{x-1}:\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-x-1}{x-1}:\frac{2}{x-1}=\frac{x^2-x-1}{2}.$$

<u>Одговор: В)</u>

Задатак 2.

Упрошћен израз $\frac{\sin 2x+\cos 2x-1}{1-\sin 2x}$ има вредност:

а) $\cos x-\sin x$; б) $\frac{2\sin x}{\cos x-\sin x}$; в) $\sin x$; г) 1 .

<u>Решење:</u>

Уз услове да је $\cos x-\sin x\neq 0$, односно, $\cos x\neq \sin x$, што је испуњено за $x_1\neq\frac{\pi}{4}+2k\pi$ и $x_2\neq\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, дати израз једнак је:

$$\frac{\sin 2x+\cos 2x-1}{1-\sin 2x}=\frac{2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{2\sin x\cos x-2\sin^2 x}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{2\sin x\,(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{2\sin x}{\cos x-\sin x}\ .$$

<u>Одговор: Б)</u>

Задатак 3.

Квадрат збира свих реалних решења једначине $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$ је:

а) 36 ; б) 26 ; в) 6 ; г) 16 .

<u>Решење:</u>

Уз услове дефинисаности квадратних корена, $3x+1\geq 0$ и $x-1\geq 0$, односно, $x\geq -\frac{1}{3}$ и $x\geq 1$ што оба услова испуњава кад је $x\geq 1$, дата једначина је еквивалентна:

$\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3x+1}=2+\sqrt{x-1} \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 3x+1=4+4\sqrt{x-1}+x-1 \ \Leftrightarrow\ 2x-2=4\sqrt{x-1} \ \Leftrightarrow\ x-1=2\sqrt{x-1} \ \Leftrightarrow\ x^2-2x+1=4x-4$

$\Leftrightarrow\ x^2-6x+5=0.$

Коришћењем Виетове формуле важи да је $x_1+x_2=6$, па је $(x_1+x_2)^2=36$.

<u>Одговор: А)</u>

Задатак 4.

Странице правоуглог троугла су чланови аритметичког низа са разликом $2cm$. Обим и површина тог троугла једнаки су:

а) $O=12cm,$ $P=24cm^2$; б) $O=24cm,$ $P=24cm^2$; в) $O=12cm,$ $P=12cm^2$; г) $O=24,$ $P=48$.

<u>Решење:</u>

Странице правоуглог троугла су чланови аритметичког низа са разликом $2cm$ па важи релација: $a=b-2cm,\ b,\ c=$

$b+2cm$. Применом Питагорине теореме можемо израчунати странице правоуглог троугла:
$(b+2)^2=(b-2)^2+b^2 \Leftrightarrow b^2+4b+4=b^2-4b+4+b^2 \Leftrightarrow b^2-8b=0 \Leftrightarrow b\,(b-8)=0.$

Како је b страница троугла, једино прихватљиво решење је $b=8cm$, одакле је $a=6cm$ и $c=10cm$. Обим и површина тог троугла биће једнаки:

$O=a+b+c=6cm+8cm+10cm=24cm\,,P=\dfrac{ab}{2}=\dfrac{6cm\cdot 8cm}{2}=24cm^2.$

Одговор: Б)

Задатак 5.

У ваљак са површином базиса $36\pi\ cm^2$ и запремином $120\pi\ cm^3$ уписана је правилна призма чија је основа многоугао са збиром унутрашњих углова 720°. Површина и запремина те призме су:

а) $P=36(3\pi+10)cm^2$, $V=\ 540\pi\ cm^3$;
б) $P=27\left(2\sqrt{3}+14\right)cm^2$, $V=\ 270\sqrt{3}\ cm^3$;
в) $P=36\left(3\sqrt{3}+10\right)cm^2$, $V=\ 540\sqrt{3}cm^3$;
г) $P=27(2\pi+14)cm^2$, $V=270\pi cm^3$.

Решење:

Из услова да је површина базиса ваљка $B_v=r^2\pi=36\pi\ cm^2$, добија се $r=6cm$, а из услова да је запремина ваљка $V_v=2r\pi H=120\pi cm^3$, добија се $H=10cm$.
Како је основа призме многоугао са збиром унутрашњих углова 720°, важи да је: $S_n=(n-2)\cdot 180^\circ=720^\circ$, одакле се добија да је $n=6$, односно да је у основи призме правилни шестоугао и да је $r=a$. Тада су површина и запремина уписане призме у ваљак једнаке:

$P=2B+M=2\cdot 6\cdot\dfrac{(6cm)^2\sqrt{3}}{4}+6\cdot 6cm\cdot 10cm=108\sqrt{3}\ cm^2+360cm^2=36\left(3\sqrt{3}+10\right)cm^2,$

$V=B\cdot H=6\cdot\dfrac{(6cm)^2\sqrt{3}}{4}\cdot 10cm=540\sqrt{3}cm^3.$

Одговор: В)

2020.

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}-1\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)$ има облик:

а) $a^2+2ab+b^2$; б) -4; в) 4; г) 1.

Решење:

Уз услове да је $a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad a+b\neq 0,\quad a-b\neq 0$, дати израз једнак је:

$$\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}-1\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)=\left(\frac{b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a-b}\right)=$$
$$=\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot\frac{a-b-a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b+a-b}{a-b}=\frac{(b-a)(b+a)}{ab}\cdot\frac{-2b}{a+b}\cdot\frac{2a}{a-b}=$$
$$=\frac{-(a-b)(b+a)}{ab}\cdot\frac{-4ab}{(a+b)(a-b)}=4.$$

Одговор: В)

Задатак 2.

Ако је $\log 3=a$, $\log 5=b$, тада је $\log_{60}16$ једнак:

а) $\frac{3-3a}{b+1}$; б) $\frac{6-6a}{2b+1}$; в) $\frac{3+3a}{b+1}$; г) $\frac{4-4b}{a-b+2}$.

Решење:

Применом особина логаритама добија се:

$$\log_{60} 16 = \frac{\log 16}{\log 60} = \frac{\log 2^4}{\log(3 \cdot 5 \cdot 4)} = \frac{4\ \log 2}{\log 3 + \log 5 + \log 2^2} = \frac{4 \log \frac{10}{5}}{a + b + 2 \log \frac{10}{5}} =$$

$$= \frac{4\ (\log 10 - \log 5)}{a + b + 2(\log 10 - \log 5)} = \frac{4(1-b)}{a+b+2(1-b)} = \frac{4-4b}{a-b+2}\ .$$

Одговор: Г)

Задатак 3.

Ако су странице троугла чланови аритметичког низа, полуобим једнак $15\ cm$, а површина $15\sqrt{3}\ cm^2$, тада је дужина висине која одговара најдужој страници троугла једнака:

а) $5\sqrt{3}\ cm$; б) $\frac{15\sqrt{3}}{7}\ cm$; в) $\frac{15\sqrt{3}}{3}\ cm$; г) $3\sqrt{3}\ cm$.

Решење:

Ако странице троугла, чланове аритметичког низа, означимо редом са: $a_1 = a - d$, $a_2 = a$, $a_3 = a + d$, из услова да је полуобим једнак $15\ cm$, односно, обим, збир све три странице троугла једнак $30\ cm$, добија се да је $a = 10\ cm$. Остале странице троугла добиће се израчунавањем разлике аритметичког низа d . Из услова површине, применом Хероновог обрасца, добија се:

$$P = \sqrt{15 \cdot (15-10)\big(15-(10-d)\big)(15-(10+d))} = 15\sqrt{3} \qquad /\ ^2$$

$$15 \cdot 5 \cdot (5+d)(5-d) = 15^2 \cdot 3$$

$$25 - d^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad d = \pm 4\ .$$

Ако претпоставимо да је a_1 најкраћа страница у троуглу, тј. да је аритметички низ растући, онда је $d = 4$, а странице у троуглу $a_1 = a - d = 6\ cm$, $a_2 = a = 10cm$, $a_3 = a + d = 14\ cm$. Висину која одговара најдужој страници, наћи ћемо из услова за површину: $P = \frac{a_3 \cdot h_3}{2} \Leftrightarrow \frac{14 \cdot h_3}{2} = 15\sqrt{3}$, одакле се добија да је $h_3 = \frac{15\sqrt{3}}{7}\ cm$.

Одговор: Б)

Задатак 4.

У правилан многоугао који има укупно **9** дијагонала уписан је круг. Површина тог круга износи $\boldsymbol{27\ \pi\ cm^2}$. Површина многоугла у који је уписан круг износи:

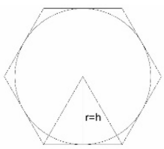
а) $9\sqrt{3}cm^2$; б) $27\sqrt{3}cm^2$; в) $54\sqrt{3}cm^2$; г) $\frac{81}{2}\sqrt{3}cm^2$.

Решење:

Коришћењем обрасца за укупан број дијагонала многоугла, добија се:

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 3n - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = 6 \quad n_2 = -3\ .$$

Како је $n \in N$, $(n \geq 3)$, једино решење које прихватамо је $n = 6$, тј. да је у питању шестоугао.



Из површине круга добија се: $27\pi = r^2\pi = h^2\pi \quad \Leftrightarrow \quad h = 3\sqrt{3}\ cm = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = 6\ cm.$

Површина шестоугла биће једнака: $P = 6\frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{36\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}\ cm^2$.

Одговор: В)

2021.

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}}-\frac{b^{-2}}{a^{-2}}\right):\left(a^{-1}+b^{-1}+\frac{b^{-2}}{a^{-1}}\right):\left(\frac{1}{b^{-1}}-\frac{1}{a^{-1}}\right)$ има облик:

а) a^{-1}; б) b^{-1} ; в) $a^{-1}+b^{-1}$; г) 1 .

Решење:

Уз коришћење услова: $a^{-1}\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$ и $b^{-1}\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b}\neq 0 \Rightarrow b\neq 0$, и увођењем смене:

$$x=a^{-1}, \qquad y=b^{-1} ,$$

дати израз биће једнак:

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y^2}{x^2}\right):\left(x+y+\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{x^3-y^3}{x^2y}:\frac{x^2+xy+y^2}{x}:\frac{x-y}{xy}=\frac{x^3-y^3}{x^2y}\cdot\frac{x}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{xy}{x-y}=$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{1}\cdot\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{1}{x-y}=1 .$$

Одговор: Г)

Задатак 2.

Збир квадрата свих решења једначине $2^{\frac{2}{x}+1}-33\cdot 2^{\frac{1}{x}-1}+4=0$ је:

а) 6 ; б) $\frac{13}{36}$; в) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{1}{6}$.

Решење:

Дата једначина је еквивалентна следећем:

$$2^{\frac{2}{x}+1}-33\cdot 2^{\frac{1}{x}-1}+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot 2^{\frac{2}{x}}-33\cdot\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2}+4=0 .$$

Након увођења смене $2^{\frac{1}{x}}=t>0$, дата једначина се трансформише у квадратну $4t^2-33t+8=0$, чија су решења $t_1=8$ и $t_2=\frac{1}{4}$. Одговарајућа решења полазне једначине добијају се из:

$$2^{\frac{1}{x}}=8=2^3 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x}=3 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{3} \quad\text{или}\quad 2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x}=-2 \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{1}{2}.$$

Тражени збир квадрата је: $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$.

Одговор: Б)

Задатак 3.

Ако су: $a_1=log(8-x)$, $a_2=-log\frac{1}{x-2}$ и $a_3=\frac{1}{log_3 10}$ прва три члана аритметичког низа, тада је x једнако:

а) $x_1=-4$, $x_2=-5$; б) $x=-4$; в) $x=5$; г) $x_1=-4$, $x_2=5$.

Решење:

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и коришћењем особина логаритма, добија се:

$a_1=log(8-x)$; услов: $8-x>0 \;\Leftrightarrow\; x<8$;

$a_2=-log\frac{1}{x-2}=log\left(\frac{1}{x-2}\right)^{-1}=log(x-2)$; услов: $x-2>0 \;\Leftrightarrow\; x>2$;

$a_3=\frac{1}{log_3 10}=log\,3$.

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, па је:

$$\log\ (x-2) - \log\ (8-x) = \log\ 3 - \log\ (x-2) .$$

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$\log \frac{x-2}{8-x} = \log \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{8-x} = \frac{3}{x-2} .$$

Сређивањем израза добија се квадратна једначина по x, $x^2 - x - 20 = 0$, чија су решења: $x_1 = -4$ и $x_2 = 5.$
Како из услова дефинисаности логаритма треба да важи да је $2 < x < 8$, једино решење које прихватамо је $x = 5$.

Одговор: В)

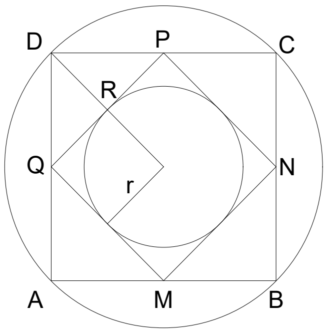
Задатак 4.

Дат је квадрат ABCD унутар ког је уписан квадрат MNPQ, тако да су тачке M, N, P, Q редом средишта страница AB, BC, CD и DA. Ако површина круга уписаног у квадрат MNPQ износи 4π cm^2, површина кружног прстена који граде круг уписан у квадрат MNPQ и круг описан око квадрата ABCD је:

а) $60\pi\ cm^2$; б) $48\pi\ cm^2$; в) $24\pi\ cm^2$; г) $12\pi\ cm^2$.

Решење:

Задатак је приказан на слици.



Из дате површине круга добија се: $4\pi = r^2\pi \Rightarrow r = 2cm \Rightarrow a_{MNPQ} = 4cm.$
Како је: $a_{MNPQ} = \frac{d_{ABCD}}{2} = R_{ABCD} = 4cm$, тражена површина кружног прстена биће једнака:

$$P_{kp} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(16 - 4) = 12\pi cm^2.$$

Одговор: Г)

*Полупречник описаног круга око троугла ABCD могуће је тражити и преко странице **a** квадрата ABCD која се налази преко Питагорине теореме:*

$$\left(\frac{a_{ABCD}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_{ABCD}}{2}\right)^2 = a_{MNPQ}{}^2 \Rightarrow 2\frac{a_{ABCD}{}^2}{4} = 16 ,$$

$$a_{ABCD} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow d_{ABCD} = a_{ABCD}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\sqrt{2} = 8cm.$$

2022.

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left[\left(\frac{(a-b)^2}{ab} + 3\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\right] : \frac{a^3-b^3}{a^2b^2}$ има облик:

а) $\frac{a+b}{2}$; б) $\frac{ab}{2}$; в) $a + b$; г) $a - b$.

Решење:

Уз коришћење услова: $a \neq b,\ \ ab \neq 0,$ дати израз биће једнак:

$$\left[\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+3\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\right]:\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}=$$
$$=\left[\left(\frac{a^2-2ab+b^2+3ab}{ab}\right)\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)\right]:\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}=$$
$$=\frac{(a^2+ab+b^2)(a-b)(a+b)}{a^2\,b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=a+b\ .$$

Одговор: В)

Задатак 2.

Решење једначине $\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^x=2$ је:

а) 0; б) 1; в) 4 ; г) 3 .

Решење:

Дата једначина је еквивалентна следећем: $(\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{2}}=2$.

Како је $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$, увођењем смене $(\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}}=t,$ дата једначина постаје еквивалентна једначини:
$t+\frac{1}{t}=2 \iff t^2-2t+1=0 \iff (t-1)^2=0 \iff t=1\,.$

Дакле, $(\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}}=1=\left(\sqrt{2}+1\right)^0$, одакле је $x=0$.

Одговор:А)

Задатак 3.

Израз $\frac{\cos^2 x-ctg^2x}{\sin^2 x-tg^2x}$ идентички је једнак:

а) ctg^6x; б) tg^4x; в) ctg^4x ; г) tg^6x .

Решење:

Коришћењем основних тригонометријских идентитета, добија се:

$$\frac{\cos^2 x-ctg^2x}{\sin^2 x-tg^2x}=\frac{\cos^2 x-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\sin^2 x-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x\cdot\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2 x\cdot\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}=\frac{\cos^2 x\cdot\left(\frac{\sin^2 x-1}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2 x\cdot\left(\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}\right)}=\frac{\cos^4 x\cdot(-\cos^2 x)}{\sin^4 x\cdot(-\sin^2 x)}=\frac{\cos^6 x}{\sin^6 x}=ctg^6x\ .$$

Одговор: А)

Задатак 4.

Бројеви: $\frac{1}{\log_2 3}$, $2\log_9(5^x-1)$, $-\log_3\frac{1}{5^x+3}$, представљају три узастопна члана аритметичког низа за x једнако:

а) 2; б) $\log_5 3$; в) $\log_3 5$; г) 1.

Решење:

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и коришћењем особина логаритма, добија се:

$$a_1=\frac{1}{\log_2 3}=\log_3 2\ ;$$
$$a_2=2\log_9(5^x-1)=2\log_{3^2}(5^x-1)=2\cdot\frac{1}{2}\log_3(5^x-1)=\log_3(5^x-1)\ ;$$
$$a_3=-\log_3\frac{1}{5^x+3}=-\log_3(5^x+3)^{-1}=\log_3(5^x+3)\ .$$

Услов: $5^x-1>0 \iff 5^x>1 \iff x>0$.

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2-a_1=a_3-a_2$, па је:

$$\log_3(5^x-1)-\log_3 2=\log_3(5^x+3)-\log_3(5^x-1)\ .$$

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$\boldsymbol{log_3}\ \frac{\mathbf{5^x-1}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{log_3}\ \frac{\mathbf{5^x+3}}{\mathbf{5^x-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathbf{5^x-1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{5^x+3}}{\mathbf{5^x-1}} \ .$$

Сређивањем израза, експоненцијална једначина: $\mathbf{5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0}$ решава се увођењем смене: $\mathbf{5^x = \boldsymbol{t} > 0}$ и добија квадратна једначина: $\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} \mathbf{- 4 \cdot \boldsymbol{t} - 5 = 0}$. Како су решења квадратне једначине $\boldsymbol{t_1} \mathbf{= 5}$ и $\boldsymbol{t_2} \mathbf{= -1}$, из услова $t > \mathbf{0}$, једино решење које прихватамо је: $\mathbf{5^x = 5}$, односно да је $\boldsymbol{x} \mathbf{= 1}$.

Одговор: Г)

Задатак 5.

Површина ромба чије се дијагонале разликују за 8 *cm* не мења се ако се краћа дијагонала продужи за 3 *cm* а дужа скрати за 4 *cm*. Обим тог ромба има дужину једнаку:

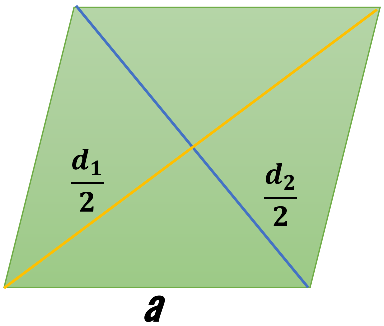
а) $34\sqrt{2}\ cm$; б) $48\ cm$; в) $80\ cm$; г) $8\sqrt{34}\ cm$.

Решење:

Коришћењем формуле за израчунавање површине ромба и датих релација,

$$d_1 = d_2 + 8\ cm\ ; \qquad \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{(d_1 - 4cm)\cdot(d_2 + 3cm)}{2} \ ,$$

добија се: $(d_2 + 8)\cdot d_2 = (d_2 + 8 - 4)\cdot(d_2 + 3)$, одакле је: $d_2 = 12cm$, а $d_1 = 20cm$.



Како код ромба важи релација Питагорине теореме за половине дијагонала и страницу ромба, добија се:

$$\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \mathbf{100\boldsymbol{cm}^2 + 36\boldsymbol{cm}^2 = 136\boldsymbol{cm}^2} \ .$$

Следи да је $a = 2\sqrt{34}\ \ cm$, а обим једнак: $O = 4a = 8\sqrt{34}\ \ cm$.

Одговор: Г)

2023.

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left(\frac{3}{x-y} + \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} : \frac{x^3-y^3}{3x}\right) \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{9(2x+y)} : \frac{x+y}{3}$ има облик:

а) $\frac{1}{x-y}$; б) $\frac{1}{x+y}$; в) $x - y$; г) $\frac{1}{xy}$.

Решење:

Уз коришћење услова: $\boldsymbol{x} \neq \pm\, \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x} \neq -\frac{y}{2}$, , дати израз биће једнак:

$$\left(\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x-y}} + \frac{\boldsymbol{x^2+xy+y^2}}{\boldsymbol{x+y}} \cdot \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x-y)(x^2+xy+y^2)}}\right) \cdot \frac{\boldsymbol{(x+y)^2}}{\mathbf{9}\boldsymbol{(2x+y)}} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x+y}} =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x-y}} + \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x-y)(x+y)}}\right) \cdot \frac{\boldsymbol{x+y}}{\mathbf{3}\ \boldsymbol{(2x+y)}} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} + \mathbf{3}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x-y)(x+y)}} \cdot \frac{\boldsymbol{x+y}}{\mathbf{3}\ \boldsymbol{(2x+y)}} =$$

$$= \frac{\mathbf{6x+3y}}{\mathbf{x-y}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3\,(2x+y)}} = \frac{\mathbf{3\,(2x+y)}}{\mathbf{x-y}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3\,(2x+y)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-y}} \quad .$$

<u>Одговор: А)</u>

Задатак 2.

Решење једначине $\log(2^x+4) + x\log 2 = 6\log 2 - \frac{1}{2}\log 4$ је:

а) 1 ; б) 2 ; в) 4 ; г) $\log 4$.

<u>Решење:</u>

Дата једначина је еквивалентна следећем:

$$\log(2^x+4) + x\log 2 = 6\log 2 - \frac{1}{2}\log 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\log(2^x+4) + \log 2^x = \log 2^6 - \log\sqrt{4} \quad \Leftrightarrow$$
$$\log(2^x+4)2^x = \log\tfrac{64}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (2^x+4)2^x = 32 \ .$$

Након увођења смене: $2^x = t > 0$, дата једначина се трансформише у квадратну, $t^2+4t-32=0$, чија су решења $t_1 = 4$ и $t_2 = -8$. Како је $2^x = t > 0$, то је $2^x = 4 = 2^2$, одакле је $x = 2$.

<u>Одговор: Б)</u>

Задатак 3.

Израз $tg\alpha + ctg\alpha - \frac{1}{sin\alpha \cdot cos\alpha}$ идентички је једнак:

а) 1 ; б) -1 ; в) 0 ; г) $tg\alpha$.

<u>Решење:</u>

Коришћењем основних тригонометријских идентитета, добија се:

$$tg\alpha + ctg\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} - \frac{1}{sin\alpha\cdot cos\alpha} = \frac{\overbrace{sin^2\alpha + cos^2\alpha}^{=1} - 1}{sin\alpha\cdot cos\alpha} = 0 \ .$$

<u>Одговор: В)</u>

Задатак 4.

Нумеричке вредности страница троугла $a\,, b\,, c$, су чланови растућег аритметичког низа. Ако је обим тог троугла $36\ cm$, а површина $54\ cm^2$, онда је висина која одговара најдужој страници троугла једнака:

а) $9\ cm$; б) $\frac{36}{5}\ cm$; в) $12\ cm^2$; г) $12\ cm$.

<u>Решење:</u>

Како су нумеричке вредности страница троугла $a\,, b\,, c$, чланови растућег аритметичког низа, важи да их можемо означити са: $b-d$, b , $b+d$. Обим троугла је $36\ cm$, па је збир страница:

$b-d+\ b\ + b+d = 3b = 36\ cm$, одакле је $b = 12\ cm$.

Коришћењем Хероновог обрасца за површину троугла $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, како је полуобим $s = \frac{O}{2} = \frac{36}{2}\ cm = 18\ cm$, добија се:

$$\sqrt{18\,(18-(12-d))(18-12)(18-(12+d))} = 54 \ ,$$
$$\sqrt{18\cdot 6\cdot(6+d)(6-d)} = 9\cdot 6 \ , \qquad /\ ^2$$
$$18\cdot 6\cdot(6^2-d^2) = 9^2\cdot 6^2 \ ,$$
$$36-d^2 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad d = \pm 3 \ .$$

Како је низ растући $(d>0)$, $d = 3\ cm$, $a = 12-3 = 9\ cm$, $c = 12+3 = 15\ cm$.

Најдужа страница троугла је страница c , па ћемо висину која јој одговара израчунати преко површине троугла.

$$P=\frac{c\cdot h_c}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{15\ cm\cdot h_c}{2}=54\ cm^2\quad\Leftrightarrow\quad h_c=\frac{54\cdot 2}{15}\ cm=\frac{36}{5}\ cm\ .$$

Одговор: Б)

Задатак 5.

Полупречник кружнице која пролази кроз тачке $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(2,-3)$ једнак је:

а) $r=9$; б) $r=3$; в) $r=2$; г) $r=\pm3$.

Решење:

Заменом координата тачака у једначину кружнице $K\colon (x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, добија се:

1) $(-1-p)^2+(0-q)^2=r^2$,

2) $(2-p)^2\ +\ (3-q)^2=r^2$,

3) $(2-p)^2\ +\ (-3-q)^2=r^2$.

Изједначавањем левих страна једнакости 1) и 2), а онда 2) и 3), систем се своди на две једначине са две непознате p и q.

$$1+2p+p^2+q^2=4-4p+p^2+9-6q+q^2\ ,$$
$$(2-p)^2+9-6q+q^2=(2-p)^2+9+6q+q^2\ .$$

Из последње једнакости добија се да је $q=0$, а онда и да је $p=2$. Заменом вредности координата центра у једначину кружнице, добија се да је $r^2=9$, па је $r=3$.

Одговор: Б)

2024.

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left(\frac{1}{4x+2}-\frac{1-x}{8x^3+1}:\frac{1-2x}{4x^2-2x+1}\right):\frac{2x-1}{4x+2}-\frac{1}{4x^2-4x+1}$ има облик:

а) 1; б) 0; в) -4 ; г) -2 .

Решење:

Уз коришћење услова: $x\neq\pm\frac{1}{2}$, дати израз биће једнак:

$$\left(\frac{1}{4x+2}-\frac{1-x}{8x^3+1}:\frac{1-2x}{4x^2-2x+1}\right):\frac{2x-1}{4x+2}-\frac{1}{4x^2-4x+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{1-x}{(2x+1)(4x^2-2x+1)}\cdot\frac{4x^2-2x+1}{1-2x}\right)\cdot\frac{4x+2}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{1-x}{(2x+1)}\cdot\frac{1}{1-2x}\right)\cdot\frac{2(2x+1)}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$

$$=\frac{1-2x-2(1-x)}{2(2x+1)(1-2x)}\cdot\frac{2(2x+1)}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$

$$=\frac{1-2x-2+2x}{1-2x}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$

$$=\frac{-1}{1-2x}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}\ =\ 0\ .$$

Одговор: Б)

Задатак 2.

Производ решења једначине $x^{\log_3 x+3\log_{27}3} = 3\cdot x$ је:

а) 1 ; б) -1 ; в) 128 ; г) 3 .

Решење:

Уз услов $x>0$, логаритмовањем за основу 3 обе стране једнакости, добија се:

$$\log_3 x^{\log_3 x+3\log_{27}3} = \log_3 3\cdot x \quad \Leftrightarrow$$
$$(\log_3 x + 3\log_{27}3)\cdot \log_3 x = \log_3 3\cdot x \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(\log_3 x + 3\cdot\frac{1}{3}\log_3 3\right)\cdot \log_3 x = \log_3 3 + \log_3 x \quad \Leftrightarrow$$
$$(\log_3 x + 1)\cdot \log_3 x = 1 + \log_3 x\ .$$

Након увођења смене: $\log_3 x = t$, дата једначина се трансформише у $(t+1)\cdot t = 1+t$, тј. у квадратну, $t^2-1=0$, чија су решења $t_1=1$ и $t_2=-1$, одакле следи $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = -1$, па је $x=3^1=3$ или $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$.

Производ решења једначине биће једнак: $3\cdot\frac{1}{3}=1$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Израз $\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x} - \frac{\sin x+\cos x}{1-tg^2 x}$ идентички је једнак:

а) $2\cos^2 x$; б) tgx ; в) $\frac{1}{\sin x-\cos x}$; г) $-2\sin^2 x$.

Решење:

Коришћењем основних тригонометријских идентитета, добија се:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x} - \frac{\sin x+\cos x}{1-tg^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x} - \frac{\sin x+\cos x}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x} - \frac{\sin x+\cos x}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x} - \frac{\cos^2 x(\sin x+\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)} =$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x-\cos x} = \frac{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{=1}}{\sin x-\cos x} = \frac{1}{\sin x-\cos x}\ .$$

Одговор: В)

Задатак 4.

Димензије квадра a, b, c, су чланови геометријског низа. Ако је запремина квадра 64 cm^3, а разлика ивица $b - a = 2cm$, онда је површина дијагоналног пресека квадра:

а) $2\sqrt{5}\, cm^2$; б) $16\sqrt{5}\, cm^2$; в) $36\sqrt{5}\, cm^2$; г) $20\sqrt{5}\, cm^2$.

Решење:

Како су димензије квадра a, b, c, чланови геометријског низа, важи да их можемо означити са: a, $a \cdot q$, $a \cdot q^2$.
Како је запремина квадра 64 cm^3, важи да је:

$$V = a \cdot b \cdot c = a \cdot \underbrace{a \cdot q} \cdot \underbrace{a \cdot q^2} = a^3 \cdot q^3 = (a \cdot q)^3 = 64 = 4^3,$$

па је $a \cdot q = 4$. Из релације да је $b - a = 2$, односно, $a \cdot q - a = 2$, добија се да је $a = 2$ и $q = 2$, па су димензије квадра $a = 2cm$, $b = 4cm$, $c = 8cm$.
Дијагонални пресек квадра је правоугаоник чија је једна страница дијагонала основе а друга висина квадра.

$$d^2 = a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Површина дијагоналног пресека биће једнака:

$$P = d \cdot c = 2\sqrt{5} \cdot 8 = 16\sqrt{5}\ cm^2.$$

Одговор: Б)

Задатак 5.

Одредити једначину кружнице која је концентрична са кружницом $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и пролази кроз пресек правих $2x + 3y - 4 = 0$ и $3x - y + 5 = 0$.

а) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$; б) $(x-3)^2 + y^2 = 9$;
в) $(x+3)^2 + y^2 = 8$; г) $(x+3)^2 + y^2 = 9$.

Решење:

Свођењем једначине дате кружнице на општи облик $K\colon (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, добија се: $(x+3)^2 + y^2 = 9$, па су координате центра кружнице $C(-3, 0)$.
Пресечну тачку две праве добићемо решавањем система линеарних једначина:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}, \quad \text{чије је решење } x = -1,\ y = 2, \text{ односно, } A(-1, 2).$$

Тражена кружница има центар као и дата кружница, $C(-3, 0)$, а пролази кроз тачку $A(-1, 2)$:

$$(x+3)^2 + y^2 = r^2, \quad A \in K\colon \ (-1+3)^2 + 2^2 = 8,$$

па је њена једначина: $(x+3)^2 + y^2 = 8$.

Одговор: В)

2025.

Задатак 1.

Вредност израза $\frac{2a}{a-x} \cdot \frac{2a^2+2x^2}{a^2+ax+x^2} : \left(\frac{1}{a-x} + \frac{a^2-ax+x^2}{a^3-x^3}\right)$ је:

а) 2 ; б) $2a$; в) 1 ; г) $-a$.

Задатак 2.

У скупу целих бројева, производ решења једначине $|x+2| = 9 - |x-3|$ је:

а) -4 ; б) 0 ; в) 3 ; г) -20 .

Задатак 3.

Ако је $\log_2 3 = a$, $\log_5 2 = b$, тада је $\log_{48} 250$ једнако:

а) $\frac{3-3a}{b+1}$ б) $\frac{2-2a}{b+1}$; в) $\frac{3+3a}{b+1}$; г) $\frac{b+3}{b\cdot(a+4)}$.

Задатак 4.

Странице правоугаоника и дијагонала су чланови аритметичког низа. Ако је дужа страница правоугаоника 8 cm, обим и површина тог правоугаоника једнаки су:

а) $O = 12\ cm,$ $P = 24\ cm^2$;

б) $O = 28\ cm,$ $P = 48\ cm^2$;

в) $O = 12\ cm,$ $P = 12\ cm^2$;

г) $O = 24,$ $P = 48$.

Задатак 5.

Правоугли трапез основица $a = 10\ cm$ и $b = 2\ cm$ ротира око мањег крака. Израчунати површину и запремину тако насталог тела, ако је површина трапеза $P = 48\ cm^2$.

а) $P = 620\pi\ cm^2,\ V = 108\pi\ cm^3$; б) $P = 108\pi\ cm^2,\ V = 620\pi\ cm^3$;

в) $P = 208\pi\ cm^2,\ V = 320\pi\ cm^3$; г) $P = 320\pi\ cm^2,\ V = 416\pi\ cm^3$.