

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задатак 1.

Вредност израза $\frac{2a}{a-x} \cdot \frac{2a^2+2x^2}{a^2+ax+x^2} : \left(\frac{1}{a-x} + \frac{a^2-ax+x^2}{a^3-x^3} \right)$ је:

- а) 2 ; б) 2a ; в) 1 ; г) -a .

Решење:

Уз коришћење услова: $a \neq x$, дати израз биће једнак:

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{a-x} \cdot \frac{2a^2+2x^2}{a^2+ax+x^2} : \left(\frac{1}{a-x} + \frac{a^2-ax+x^2}{a^3-x^3} \right) = \\ & = \frac{2a}{a-x} \cdot \frac{2(a^2+x^2)}{a^2+ax+x^2} : \frac{a^2+ax+x^2+a^2-ax+x^2}{(a-x)(a^2+ax+x^2)} = \\ & = \frac{2a}{a-x} \cdot \frac{2(a^2+x^2)}{a^2+ax+x^2} : \frac{2(a^2+x^2)}{(a-x)(a^2+ax+x^2)} = \\ & = \frac{2a}{a-x} \cdot \frac{2(a^2+x^2)}{a^2+ax+x^2} \cdot \frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)}{2(a^2+x^2)} = 2a. \end{aligned}$$

Тачно решење задатка је под **б) 2a** .

Задатак 2.

У скупу целих бројева, производ решења једначине $|x+2| = 9 - |x-3|$ је:

- а) -4 ; б) 0 ; в) 3 ; г) -20 .

Решење:

Како је:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ 3-x, & x < 3 \end{cases}, \quad |x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -2-x, & x < -2 \end{cases},$$

то x може припадати следећим интервалима $(-\infty, -2)$; $[-2, 3)$; $[3, +\infty)$. Разликујемо три случаја:

	$x < -2$	$-2 \leq x < 3$	$x \geq 3$
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	$x - 3$
$ x + 2 $	$-2 - x$	$x + 2$	$x + 2$

1) За $x \in (-\infty, -2)$, дата једначина еквивалентна је једначини:

$$-2 - x = 9 - (3 - x) \Leftrightarrow -2 - x = 6 + x \Leftrightarrow -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4.$$

2) За $x \in [-2, 3)$, дата једначина еквивалентна је једначини:

$$x + 2 = 9 - (3 - x) \Leftrightarrow x + 2 = 6 + x, \text{ једначина у том случају нема решења.}$$

3) За $x \in [3, +\infty)$, дата једначина еквивалентна је једначини:

$$x + 2 = 9 - (x - 3) \Leftrightarrow x + 2 = 9 - x + 3 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5.$$

Дакле, $x = -4$ и $x = 5$ су решења полазне једначине, па је производ решења: $-4 \cdot 5 = -20$.

Тачно решење задатка је под **г) -20** .

Задатак 3.

Ако је $\log_2 3 = a$, $\log_5 2 = b$, тада је $\log_{48} 250$ једнако:

а) $\frac{3-3a}{b+1}$ б) $\frac{2-2a}{b+1}$; в) $\frac{3+3a}{b+1}$; г) $\frac{b+3}{b \cdot (a+4)}$.

Решење:

Коришћењем основних особина логаритма, добија се:

$$\begin{aligned} \log_{48} 250 &= \frac{\log_2 250}{\log_2 48} = \frac{\log_2 (2 \cdot 5^3)}{\log_2 (3 \cdot 2^4)} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5^3}{\log_2 3 + \log_2 2^4} = \frac{1 + 3 \log_2 5}{a + 4 \log_2 2} = \\ &= \frac{1 + 3 \cdot \frac{1}{\log_5 2}}{a + 4} = \frac{1 + \frac{3}{b}}{a + 4} = \frac{\frac{b+3}{b}}{a + 4} = \frac{b+3}{b \cdot (a+4)} \end{aligned}$$

Тачно решење задатка је под **г) $\frac{b+3}{b \cdot (a+4)}$** .

Задатак 4.

Странице правоугаоника и дијагонала су чланови аритметичког низа. Ако је дужа страница правоугаоника 8 cm , обим и површина тог правоугаоника једнаки су:

- а) $O = 12\text{ cm}$,
 $P = 24\text{ cm}^2$; б) $O = 28\text{ cm}$,
 $P = 48\text{ cm}^2$; в) $O = 12\text{ cm}$,
 $P = 12\text{ cm}^2$; г) $O = 24$,
 $P = 48$.

Решење:

Како су странице правоугаоника и дијагонала чланови аритметичког низа, важи да их можемо означити са: $a = b - d_{an}$, b , $d = b + d_{an}$, где су a и b странице правоугаоника, d је његова дијагонала, а d_{an} је разлика аритметичког низа.

Како је дужа страница правоугаоника 8 cm , а странице и дијагонала правоугаоника образују правоугли троугао, важи да је:

$$(8 + d_{an})^2 = (8 - d_{an})^2 + 8^2, \text{ односно, након квадрирања и сређивања: } 32 d_{an} = 64,$$

па је $d_{an} = 2\text{ cm}$. Онда је $a = 6\text{ cm}$, $b = 8\text{ cm}$, $d = 10\text{ cm}$.

Обим правоугаоника биће једнак:

$$O = 2a + 2b = 12\text{ cm} + 16\text{ cm} = 28\text{ cm},$$

а површина једнака:

$$P = a \cdot b = 48\text{ cm}^2.$$

Тачно решење задатка је под **б) $O = 28\text{ cm}$, $P = 48\text{ cm}^2$** .

Задатак 5.

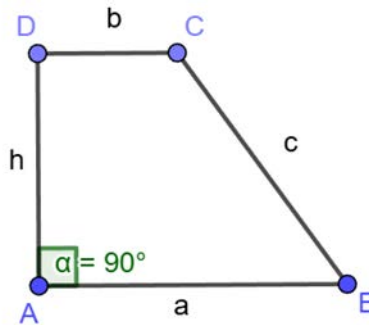
Правоугли трапез основица $a = 12\text{ cm}$ и $b = 4\text{ cm}$ ротира око мањег крака. Израчунати површину и запремину тако насталог тела, ако је површина трапеза $P = 48\text{ cm}^2$.

- а) $P = 620\pi\text{ cm}^2$, $V = 108\pi\text{ cm}^3$; б) $P = 108\pi\text{ cm}^2$, $V = 620\pi\text{ cm}^3$;
в) $P = 208\pi\text{ cm}^2$, $V = 320\pi\text{ cm}^3$; г) $P = 320\pi\text{ cm}^2$, $V = 416\pi\text{ cm}^3$.

Решење:

Ротацијом правоуглог трапеза око мањег крака добија се зарубљена купа, чији је полупречник доње основе $r_1 = a = 12\text{ cm}$, а полупречник горње основе $r_2 = b = 4\text{ cm}$.

Изводница је $s = c$, а висина зарубљене купе H једнака је висини трапеза, односно краку око ког траpez ротира, коју добијамо на основу познате површине и основица, а из формуле за израчунавање површине трапеза $P = \frac{a+b}{2} \cdot h \Rightarrow h = 6 \text{ cm}$.



Како је површина зарубљене купе једнака $P = (r_1^2 + (r_1 + r_2)s + r_2^2)\pi$, након израчунавања изводнице s , односно крака c , применом Питагорине теореме на уочени правоугли троугао ($c^2 = h^2 + (a - b)^2$), добијамо да је $P = 320\pi \text{ cm}^2$.

Формула за израчунавање запремине зарубљене купе је $V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$, односно,

$V = \frac{H}{3}(r_1^2\pi + r_1 r_2\pi + r_2^2\pi)$, одакле следи да је запремина једнака $V = 416\pi \text{ cm}^3$.

Тачно решење задатка је под **г)** $P = 320\pi \text{ cm}^2$, $V = 416\pi \text{ cm}^3$.

Комисија за полагање пријемног испита