01.07.2024.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left(\frac{1}{4x+2}-\frac{1-x}{8x^3+1}:\frac{1-2x}{4x^2-2x+1}\right):\frac{2x-1}{4x+2}-\frac{1}{4x^2-4x+1}$ има облик:

а) 1 ; б) 0 ; в) -4 ; г) -2 .

Решење:

Уз коришћење услова: $x \neq \pm\frac{1}{2}$, дати израз биће једнак:

$$\left(\frac{1}{4x+2}-\frac{1-x}{8x^3+1}:\frac{1-2x}{4x^2-2x+1}\right):\frac{2x-1}{4x+2}-\frac{1}{4x^2-4x+1}=$$
$$=\left(\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{1-x}{(2x+1)(4x^2-2x+1)}\cdot\frac{4x^2-2x+1}{1-2x}\right)\cdot\frac{4x+2}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$
$$=\left(\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{1-x}{(2x+1)}\cdot\frac{1}{1-2x}\right)\cdot\frac{2(2x+1)}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$
$$=\frac{1-2x-2(1-x)}{2(2x+1)(1-2x)}\cdot\frac{2(2x+1)}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$
$$=\frac{1-2x-2+2x}{1-2x}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=$$
$$=\frac{-1}{1-2x}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=0\ .$$

Тачно решење задатка је под **б) 0** .

Задатак 2.

Производ решења једначине $x^{\log_3 x+3\log_{27}3}=3\cdot x$ је:

а) 1 ; б) -1 ; в) 128 ; г) 3 .

Решење:

Уз услов $x>0$, логаритмовањем за основу 3 обе стране једнакости, добија се:

$$\log_3 x^{\log_3 x + 3\log_{27} 3} = \log_3 3 \cdot x \quad \Leftrightarrow$$

$$(\log_3 x + 3\log_{27} 3) \cdot \log_3 x = \log_3 3 \cdot x \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\log_3 x + 3 \cdot \frac{1}{3}\log_3 3\right) \cdot \log_3 x = \log_3 3 + \log_3 x \quad \Leftrightarrow$$

$$(\log_3 x + 1) \cdot \log_3 x = 1 + \log_3 x \ .$$

Након увођења смене: $\log_3 x = t$, дата једначина се трансформише у $(t+1) \cdot t = 1 + t$, тј. у квадратну, $t^2 - 1 = 0$, чија су решења $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$, одакле следи $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = -1$, па је $x = 3^1 = 3$ или $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Производ решења једначине биће једнак: $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Тачно решење задатка је под **а) 1 .**

Задатак 3.

Израз $\frac{sin^2 x}{sinx - cosx} - \frac{sinx + cosx}{1 - tg^2 x}$ идентички је једнак:

а) $2cos^2 x$; б) tgx ; в) $\frac{1}{sinx - cosx}$; г) $-2sin^2 x$.

Решење:

Коришћењем основних тригонометријских идентитета, добија се:

$$\frac{sin^2 x}{sinx - cosx} - \frac{sinx + cosx}{1 - tg^2 x} = \frac{sin^2 x}{sinx - cosx} - \frac{sinx + cosx}{1 - \frac{sin^2 x}{cos^2 x}} =$$

$$= \frac{sin^2 x}{sinx - cosx} - \frac{sinx + cosx}{\frac{cos^2 x - sin^2 x}{cos^2 x}} =$$

$$= \frac{sin^2 x}{sinx - cosx} - \frac{cos^2 x(sinx + cosx)}{(cosx - sinx)(sinx + cosx)} =$$

$$= \frac{sin^2 x}{sinx - cosx} + \frac{cos^2 x}{sinx - cosx} =$$

$$= \frac{\overbrace{sin^2 x + cos^2 x}^{=1}}{sinx - cosx} = \frac{1}{sinx - cosx} \ .$$

Тачно решење задатка је под **в) $\frac{1}{sinx - cosx}$.**

Задатак 4.

Димензије квадра a, b, c, су чланови геометријског низа. Ако је запремина квадра 64 cm^3, а разлика ивица $b - a = 2cm$, онда је површина дијагоналног пресека квадра:

а) $2\sqrt{5}\ cm^2$; б) $16\sqrt{5}\ cm^2$; в) $36\sqrt{5}\ cm^2$; г) $20\sqrt{5}\ cm^2$.

Решење:

Како су димензије квадра a, b, c, чланови геометријског низа, важи да их можемо означити са: $a, \ a \cdot q, \ a \cdot q^2$.
Како је запремина квадра 64 cm^3, важи да је:

$$V = a \cdot b \cdot c = a \cdot \underbrace{a \cdot q} \cdot \underbrace{a \cdot q^2} = a^3 \cdot q^3 = (a \cdot q)^3 = 64 = 4^3 ,$$

па је $a \cdot q = 4$. Из релације да је $b - a = 2$, односно, $a \cdot q - a = 2$, добија се да је $a = 2$ и $q = 2$, па су димензије квадра $a = 2cm$, $b = 4cm$, $c = 8cm$.
Дијагонални пресек квадра је правоугаоник чија је једна страница дијагонала основе а друга висина квадра.

$$d^2 = a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \ .$$

Површина дијагоналног пресека биће једнака:

$$P = d \cdot c = 2\sqrt{5} \cdot 8 = 16\sqrt{5}\ cm^2.$$

Тачно решење задатка је под **б)** $\mathbf{16\sqrt{5}\ cm^2}$.

Задатак 5.

Одредити једначину кружнице која је концентрична са кружницом $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и пролази кроз пресек правих $2x + 3y - 4 = 0$ и $3x - y + 5 = 0$.

а) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$;
б) $(x-3)^2 + y^2 = 9$;
в) $(x+3)^2 + y^2 = 8$;
г) $(x+3)^2 + y^2 = 9$.

Решење:

Свођењем једначине дате кружнице на општи облик $K\!: \ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, добија се: $(x+3)^2 + y^2 = 9$, па су координате центра кружнице $C(-3, 0)$.
Пресечну тачку две праве добићемо решавањем система линеарних једначина:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases} ,$$ чије је решење $x = -1$, $y = 2$, односно, $A(-1, 2)$.

Тражена кружница има центар као и дата кружница, $C(-3,0)$, а пролази кроз тачку $A(-1,2)$:

$$(x+3)^2 + y^2 = r^2 \quad , \qquad A \in K: \quad (-1+3)^2 + 2^2 = 8 \, ,$$

па је њена једначина: $(x+3)^2 + y^2 = 8$.

Тачно решење задатка је под **в)** $\boldsymbol{(x+3)^2 + y^2 = 8}$.

Комисија за полагање пријемног испита