30.06.2023.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left(\frac{3}{x-y}+\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}:\frac{x^3-y^3}{3x}\right)\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{9(2x+y)}:\frac{x+y}{3}$ има облик:

а) $\frac{1}{x-y}$; б) $\frac{1}{x+y}$; в) $x-y$; г) $\frac{1}{xy}$.

Решење:

Уз коришћење услова: $x\neq\pm y$, $x\neq 0$, $x\neq -\frac{y}{2}$, , дати израз биће једнак:

$$\left(\frac{3}{x-y}+\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\cdot\frac{3x}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\right)\cdot\frac{(x+y)^2}{9(2x+y)}\cdot\frac{3}{x+y}=$$

$$=\left(\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{(x-y)(x+y)}\right)\cdot\frac{x+y}{3\,(2x+y)}=\frac{3x+3y+3x}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{x+y}{3\,(2x+y)}=$$

$$=\frac{6x+3y}{x-y}\cdot\frac{1}{3\,(2x+y)}=\frac{3\,(2x+y)}{x-y}\cdot\frac{1}{3\,(2x+y)}=\frac{1}{x-y}\quad.$$

Тачно решење задатка је под **а)** $\frac{1}{x-y}$.

Задатак 2.

Решење једначине $\log(2^x+4)+x\log 2=6\log 2-\frac{1}{2}\log 4$ је:

а) 1 ; б) 2 ; в) 4 ; г) $\log 4$.

Решење:

Дата једначина је еквивалентна следећем:

$$\log(2^x+4)+x\log 2=6\log 2-\frac{1}{2}\log 4\quad\Leftrightarrow$$

$$\log(2^x+4)+\log 2^x=\log 2^6-\log\sqrt{4}\quad\Leftrightarrow$$

$$\log(2^x+4)2^x=\log\frac{64}{2}\quad\Leftrightarrow\quad(2^x+4)2^x=32\ .$$

Након увођења смене: $2^x = t > 0$, дата једначина се трансформише у квадратну, $t^2 + 4t - 32 = 0$, чија су решења $t_1 = 4$ и $t_2 = -8$. Како је $2^x = t > 0$, то је $2^x = 4 = 2^2$, одакле је $x = 2$.

Тачно решење задатка је под **б) 2 .**

Задатак 3.

Израз $tg\alpha + ctg\alpha - \frac{1}{sin\alpha \cdot cos\alpha}$ идентички је једнак:

а) 1 ; б) -1 ; в) 0 ; г) $tg\alpha$.

Решење:

Коришћењем основних тригонометријских идентитета, добија се:

$$tg\alpha + ctg\alpha - \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} - \frac{1}{sin\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{\overbrace{sin^2\alpha + cos^2\alpha}^{=1} - 1}{sin\alpha \cdot cos\alpha} = 0 \ .$$

Тачно решење задатка је под **в) 0 .**

Задатак 4.

Нумеричке вредности страница троугла a , b , c , су чланови растућег аритметичког низа. Ако је обим тог троугла $36\,cm$, а површина $54\,cm^2$, онда је висина која одговара најдужој страници троугла једнака:

а) $9\,cm$; б) $\frac{36}{5}\,cm$; в) $12\,cm^2$; г) $12\,cm$.

Решење:

Како су нумеричке вредности страница троугла a , b , c , чланови растућег аритметичког низа, важи да их можемо означити са: $b - d$, b , $b + d$. Обим троугла је $36\,cm$, па је збир страница:
$b - d + b + b + d = 3b = 36\,cm$, одакле је $b = 12\,cm$.
Коришћењем Хероновог обрасца за површину троугла $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, како је полуобим $s = \frac{O}{2} = \frac{36}{2}\,cm = 18\,cm$, добија се:

$$\sqrt{18\,(18 - (12 - d))(18 - 12)(18 - (12 + d))} = 54 \ ,$$

$$\sqrt{18 \cdot 6 \cdot (6 + d)(6 - d)} = 9 \cdot 6 \ , \qquad /\ ^2$$

$$18 \cdot 6 \cdot (6^2 - d^2) = 9^2 \cdot 6^2 \ ,$$

$$36 - d^2 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad d = \pm 3 \ .$$

Како је низ растући $(d > 0)$, $d = 3\ cm$, $a = 12 - 3 = 9\ cm$, $c = 12 + 3 = 15\ cm$.
Најдужа страница троугла је страница c , па ћемо висину која јој одговара израчунати преко површине троугла.

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{15\ cm \cdot h_c}{2} = 54\ cm^2 \quad \Leftrightarrow \quad h_c = \frac{54 \cdot 2}{15}\ cm = \frac{36}{5}\ cm \ .$$

Тачно решење задатка је под **б)** $\boldsymbol{\frac{36}{5}\ cm}$ **.**

Задатак 5.

Полупречник кружнице која пролази кроз тачке $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(2,-3)$ једнак је:

а) $r = 9$; б) $r = 3$; в) $r = 2$; г) $r = \pm 3$.

Решење:

Заменом координата тачака у једначину кружнице $K\colon\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, добија се:

1) $(-1-p)^2 + (0-q)^2 = r^2$,

2) $(2-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$,

3) $(2-p)^2 + (-3-q)^2 = r^2$.

Изједначавањем левих страна једнакости 1) и 2), а онда 2) и 3), систем се своди на две једначине са две непознате p и q.

$$1 + 2p + p^2 + q^2 = 4 - 4p + p^2 + 9 - 6q + q^2 \quad ,$$

$$(2-p)^2 + 9 - 6q + q^2 = (2-p)^2 + 9 + 6q + q^2 \quad .$$

Из последње једнакости добија се да је $q = 0$, а онда и да је $p = 2$. Заменом вредности координата центра у једначину кружнице, добија се да је $r^2 = 9$, па је $r = 3$.

Тачно решење задатка је под **б)** $\boldsymbol{r = 3}$.

Комисија за полагање пријемног испита