01.07.2022.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left[\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+3\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\right]:\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}$ има облик:

а) $\frac{a+b}{2}$; б) $\frac{ab}{2}$; в) $a+b$; г) $a-b$.

Решење:

Уз коришћење услова: $a \neq b$, $ab \neq 0$, дати израз биће једнак:

$$\left[\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+3\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\right]:\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}=$$
$$=\left[\left(\frac{a^2-2ab+b^2+3ab}{ab}\right)\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)\right]:\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}=$$
$$=\frac{(a^2+ab+b^2)(a-b)(a+b)}{a^2\,b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=a+b\ .$$

Тачно решење задатка је под **в)** $a+b$ **.**

Задатак 2.

Решење једначине $\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^x=2$ је:

а) 0; б) 1; в) 4 ; г) 3 .

Решење:

Дата једначина је еквивалентна следећем: $(\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{2}}=2$.

Како је $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$, увођењем смене $(\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}}=t$, дата једначина постаје еквивалентна једначини: $t+\frac{1}{t}=2 \quad\Leftrightarrow\quad t^2-2t+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (t-1)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=1$.

Дакле, $(\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}}=1=(\sqrt{2}+1)^0$, одакле је $x=0$.

Тачно решење задатка је под **а) 0 .**

Задатак 3.

Израз $\frac{\cos^2 x - ctg^2 x}{\sin^2 x - tg^2 x}$ идентички је једнак:

а) $ctg^6 x$; б) $tg^4 x$; в) $ctg^4 x$; г) $tg^6 x$.

Решење:

Коришћењем основних тригонометријских идентитета, добија се:

$$\frac{\cos^2 x - ctg^2 x}{\sin^2 x - tg^2 x} = \frac{\cos^2 x - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2 x \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \frac{\cos^2 x \cdot \left(\frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2 x \cdot \left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\right)} = \frac{\cos^4 x \cdot (-\cos^2 x)}{\sin^4 x \cdot (-\sin^2 x)} = \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x} = ctg^6 x \quad .$$

Тачно решење задатка је под **а) $ctg^6 x$.**

Задатак 4.

Бројеви: $\frac{1}{\log_2 3}$, $2\log_9(5^x - 1)$, $-\log_3 \frac{1}{5^x+3}$, представљају три узастопна члана аритметичког низа за x једнако:

а) 2; б) $\log_5 3$; в) $\log_3 5$; г) 1.

Решење:

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и коришћењем особина логаритма, добија се:

$$a_1 = \frac{1}{\log_2 3} = \log_3 2 \quad ;$$

$$a_2 = 2\log_9 (5^x - 1) = 2\log_{3^2} (5^x - 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_3 (5^x - 1) = \log_3 (5^x - 1) \; ;$$

$$a_3 = -\log_3 \frac{1}{5^x+3} = -\log_3 (5^x + 3)^{-1} = \log_3 (5^x + 3) \quad .$$

Услов: $5^x - 1 > 0 \iff 5^x > 1 \iff x > 0$.

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, па је:

$$\log_3 (5^x - 1) - \log_3 2 = \log_3 (5^x + 3) - \log_3 (5^x - 1) \quad .$$

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$\log_3 \frac{5^x - 1}{2} = \log_3 \frac{5^x + 3}{5^x - 1} \iff \frac{5^x - 1}{2} = \frac{5^x + 3}{5^x - 1} \quad .$$

Сређивањем израза, експоненцијална једначина: $\mathbf{5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0}$ решава се увођењем смене: $\mathbf{5^x = t > 0}$ и добија квадратна једначина: $\mathbf{t^2 - 4 \cdot t - 5 = 0}$. Како су решења квадратне једначине $\mathbf{t_1 = 5}$ и $\mathbf{t_2 = -1}$, из услова $t > \mathbf{0}$, једино решење које прихватамо је: $\mathbf{5^x = 5}$, односно да је $\mathbf{x = 1}$.

Тачно решење задатка је под **г) $\mathbf{1}$** .

Задатак 5.

Површина ромба чије се дијагонале разликују за 8 *cm* не мења се ако се краћа дијагонала продужи за 3 *cm* а дужа скрати за 4 *cm*. Обим тог ромба има дужину једнаку:

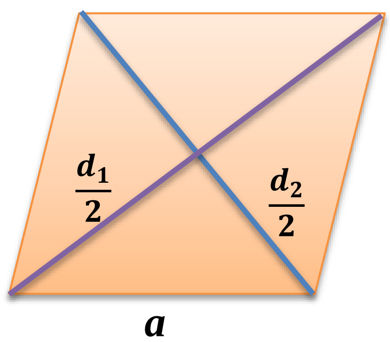
а) $34\sqrt{2}\ cm$; б) $48\ cm$; в) $80\ cm$; г) $8\sqrt{34}\ cm$.

Решење:

Коришћењем формуле за израчунавање површине ромба и датих релација,

$$d_1 = d_2 + 8\ cm\ ; \qquad \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{(d_1 - 4cm)\cdot(d_2 + 3cm)}{2} \ ,$$

добија се: $(d_2 + 8) \cdot d_2 = (d_2 + 8 - 4) \cdot (d_2 + 3)$, одакле је: $d_2 = 12cm$, а $d_1 = 20cm$.



Како код ромба важи релација Питагорине теореме за половине дијагонала и страницу ромба, добија се:

$$\mathbf{a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 100cm^2 + 36cm^2 = 136cm^2} \ .$$

Следи да је $a = 2\sqrt{34}\ cm$, а обим једнак: $O = 4a = 8\sqrt{34}\ cm$.

Тачно решење задатка је под **г) $\mathbf{8\sqrt{34}\ cm}$** .

Комисија за полагање пријемног испита