01.07.2021.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задатак 1.

Упрошћени израз $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}}-\frac{b^{-2}}{a^{-2}}\right):\left(a^{-1}+b^{-1}+\frac{b^{-2}}{a^{-1}}\right):\left(\frac{1}{b^{-1}}-\frac{1}{a^{-1}}\right)$ има облик:

а) a^{-1}; б) b^{-1} ; в) $a^{-1}+b^{-1}$; г) 1 .

Решење:

Уз коришћење услова: $a^{-1}\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$ и $b^{-1}\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b}\neq 0 \Rightarrow b\neq 0$, и увођењем смене:

$$x=a^{-1}, \qquad y=b^{-1} ,$$

дати израз биће једнак:

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y^2}{x^2}\right):\left(x+y+\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{x^3-y^3}{x^2y}:\frac{x^2+xy+y^2}{x}:\frac{x-y}{xy}=\frac{x^3-y^3}{x^2y}\cdot\frac{x}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{xy}{x-y}=$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{1}\cdot\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{1}{x-y}=1 .$$

Тачно решење задатка је под **г) 1 .**

Задатак 2.

Збир квадрата свих решења једначине $2^{\frac{2}{x}+1}-33\cdot 2^{\frac{1}{x}-1}+4=0$ је:

а) 6 ; б) $\frac{13}{36}$; в) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{1}{6}$.

Решење:

Дата једначина је еквивалентна следећем:

$$2^{\frac{2}{x}+1} - 33 \cdot 2^{\frac{1}{x}-1} + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 2^{\frac{2}{x}} - 33 \cdot \frac{2^{\frac{1}{x}}}{2} + 4 = 0 \ .$$

Након увођења смене $2^{\frac{1}{x}} = t > 0$, дата једначина се трансформише у квадратну $4t^2 - 33t + 8 = 0$, чија су решења $t_1 = 8$ и $t_2 = \frac{1}{4}$. Одговарајућа решења полазне једначине добијају се из:

$$2^{\frac{1}{x}} = 8 = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad 2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Тражени збир квадрата је: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$.

Тачно решење задатка је под **б)** $\frac{13}{36}$.

Задатак 3.

Ако су: $a_1 = log(8 - x\ )$, $a_2 = -\,log\frac{1}{x-2}$ и $a_3 = \frac{1}{log_3 10}$ прва три члана аритметичког низа, тада је x једнако:

а) $x_1 = -4$, $x_2 = -5$;

б) $x = -4$;

в) $x = 5$;

г) $x_1 = -4$, $x_2 = 5$.

<u>Решење:</u>

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и коришћењем особина логаритма, добија се:

$$a_1 = log(8 - x\ ) \ ; \qquad \text{услов: } 8 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 8 \ ;$$

$$a_2 = -\,log\frac{1}{x-2} = log\left(\frac{1}{x-2}\right)^{-1} = log(x-2) \ ; \qquad \text{услов: } x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2 \ ;$$

$$a_3 = \frac{1}{log_3 10} = log\,3 \ .$$

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, па је:

$$log\ \ (x-2) - log\ \ (8-x)\ = log\ \ 3\ - log\ \ (x-2)\ \ .$$

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$log\ \ \frac{x-2}{8-x}\ = log\ \ \frac{3}{x-2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x-2}{8-x} = \frac{3}{x-2} \ .$$

Сређивањем израза добија се квадратна једначина по $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x^2 - x - 20 = 0}$, чија су решења: $\boldsymbol{x_1 = -4}$ *и* $\boldsymbol{x_2 = 5.}$ Како из услова дефинисаности логаритма треба да важи да је $2 < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{8}$, једино решење које прихватамо је $\boldsymbol{x = 5}$.

Тачно решење задатка је под **в)** $\boldsymbol{x = 5.}$

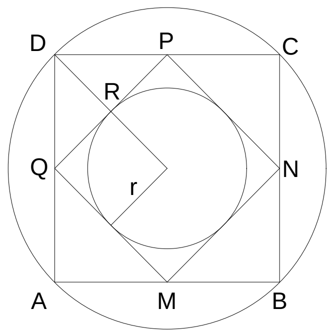
Задатак 4.

Дат је квадрат ABCD унутар ког је уписан квадрат MNPQ, тако да су тачке M, N, P, Q редом средишта страница AB, BC, CD и DA. Ако површина круга уписаног у квадрат MNPQ износи 4π cm^2 , површина кружног прстена који граде круг уписан у квадрат MNPQ и круг описан око квадрата ABCD је:

а) $60\pi\ cm^2$; б) $48\pi\ cm^2$; в) $24\pi\ cm^2$; г) $12\pi\ cm^2$.

Решење:

Задатак је приказан на слици.



Из дате површине круга добија се: $\boldsymbol{4\pi = r^2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{r = 2cm} \Rightarrow \boldsymbol{a_{MNPQ} = 4cm.}$

Како је: $\boldsymbol{a_{MNPQ} = \frac{d_{ABCD}}{2} = R_{ABCD} = 4cm}$, тражена површина кружног прстена биће једнака:

$$\boldsymbol{P_{kp} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(16 - 4) = 12\pi cm^2}.$$

Тачно решење задатка је под **г)** $\boldsymbol{12\pi\ cm^2}$ **.**

Полупречник описаног круга око троугла ABCD могуће је тражити и преко странице ***a*** *квадрата ABCD која се налази преко Питагорине теореме:*

$$\left(\frac{a_{ABCD}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_{ABCD}}{2}\right)^2 = a_{MNPQ}{}^2 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{a_{ABCD}{}^2}{4} = 16\,,$$
$$a_{ABCD} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad d_{ABCD} = a_{ABCD}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\sqrt{2} = 8cm.$$

Комисија за полагање пријемног испита