



А К А Д Е М И Ј А
ТЕХНИЧКО-ВАСПИТАЧКИХ
СТРУКОВНИХ СТУДИЈА

ИНФОРМАТОР

са збирком решених задатака

2020



ЗНАЊЕ ЈЕ МОЋ.



ИНФОРМАТОР

са збирком решених задатака за упис
у школску 2020/2021.



Ниш, 2020

Издавач
Академија техничко-васпитачких струковних студија - Одсек Ниш

За издавача
др Срђан Јовковић

Задатке из математике припремили професори школе
др Милица Цветковић, професор
др Наташа Савић, предавач

Информатор приредио
ВТШ промо тим

Компјутерска обрада и корица
Горан Милосављевић
Немања Петровић

Година издавања
2020.

Садржај

Предговор	1
Поздравна реч	3
Разлози зашто студирати наше студијске програме	5
Акредитација студијских програма	7
Диплома	8
Простор и опрема	9
Студентска пракса	14
Студентско организовање	15
Међународна сарадња и студентска размена	17
Пријава на конкурс	18
Студијски програми - курикулуми	19
Основне струковне студије	20
Мастер струковне студије	32
Примери задатака према програму пријемног испита из математике	39
Могући примери задатака за пријемни испит	61
Решени задаци са раније одржаних пријемних испита	77

Предговор

Академија техничко-васпитачких струковних студија - одсек Ниш, је државна, самостална, високошколска установа која образује струковне инжењере за потребе привреде и индустрије региона и шире. Савремени и иновативни програми, нове наставне методе, савремени простор, опрема и лабораторије обезбеђују нашим студентима практична знања и отварање великих могућности при запошљавању.

Овај Информатор служи да будућим студентима помогне при избору студијског програма на коме ће наставити школовање и олакша полагање пријемног испита из математике.

Информатор пружа основне информације о одсеку, студијским програмима које се на њему реализују, условима уписа, стратегији обезбеђења квалитета студија и другим активностима које одсек Ниш реализује.

Информатор садржи упутства за пријаву на конкурс и информације о начину полагања пријемног испита.

Пријемни испит се полаже из математике, а у овом информатору будући студенти могу да нађу преглед задатака са упутствима за њихово решавање и решењима из последњих десет година.

Поздравна реч



Поштовани будући студенти,

Академија техничко-васпитачких струковних студија, формирана је одлуком Владе Републике Србије, статусном променом спајања Високе техничке школе струковних студија из Ниша, Високе струковне школе за образовање васпитача из Пирота и Високе школе примењених струковних студија из Врања. Циљ ове трансформације јесте подизања квалитета наставног процеса и јачања капацитете струковног образовања. Ново формирана установа јесте гарант да ће квалитет образовања бити на већем нивоу, да ће свршени студенти са стеченим знањима, ефикасније одговарати захтевима тржишта рада, да ће брже и лакше долазити до посла, као и да ће њихов допринос развоју нашег друштва бити на адекватном нивоу. Академија техничко-васпитачких струковних студија биће лидер струковног образовања у овом делу Србије.

Одсек Ниш, у школској 2020/2021 реализоваће:

1. Шест студијских програма на основим студијама: Савремене рачунарске технологије, Друмски саобраћај, Комуникационе технологије, Индустијско инжењерство, Заштиту животне средине и Грађевинско инжењерство,
2. Два студијска програма на мастер студијама: Мултимедијалне комуникационе технологије и Управљање отпадом.

У поступку акредитације су још четири мастер студијска програма који представљају надградњу студијских програма основних студија и то: Грађевинске конструкције и управљање изградњом, Производно информационе технологије, Друмски саобраћај и транспорт и Информационе технологије и системи.

Програми се одликују савременим наставним садржајима који, у комбинацији са практичним радом, омогућавају студентима стицање савремених знања, вештина, способности и ставова потребних све захтевнијем тржишту рада. Заштитни знак одсека Ниш је иновативан приступ процесу учења и у том правцу ћемо наставити и даље.

Наша опредељеност за сарадњу са привредом отворила је врата нашим студентима да се оспособљавају у оквиру стручне праксе током студирања, да унапређују и управљају производним процесима и да као одговорни људи дају свој пуни допринос развоју нашег друштва.

Звање струковног инжењера, студент може да стекне у року од три године (180 ЕСПБ), уз услов да континуирано ради на пројектним задацима, и буде отворен за стицање нових знања.

У новој школској 2020/2021. години, желимо да заједно са Вама, постигнемо још боље резултате.

Добродошли

Разлози зашто студирати наше студијске програме

1. Наши студијски програми и наше дипломе свих нивоа студија препознате на тржишту рада; гарантују запошљавање и пружају могућност стипендирања током школовања;
2. ПРАТИМО ТРЕНДОВЕ ИНДУСТИРЈЕ 4.0;
3. У току студија на Академији техничко-васпитачких струковних студија – одсек Ниш студент се може ослањати на стручне професоре, посвећене свом позиву;
4. Обезбеђујемо професионалну стручну праксу и примену стечених знања у реалним производним процесима а касније и могућност запошљавања;
5. Учимо студенте да професионални живот није само професија већ и живот;
6. Богата међународна сарадња, боравак студената на сродним установама у Европској унији у трајању од једног семестра
7. На располагању је 9 најсавременијих лабораторија и друга опрема;
8. **Наше дипломе значе:**
 - сигурно **ЗАПОСЛЕЊЕ** у струци
 - успешна **КАРИЈЕРА**
 - примењиво знање
 - успех



Свој „пут“ Одсек Ниш Академије техничко - васпитачких струковних студија Ниш, започео је, као **Виша школа за образовање радника "Станко Пауновић" 1976.** год. Школа се брзо развијала и одговарала изазовима тржишта. Школа је променила име у **Виша техничка школа** 1983. год. и од тада се бави образовањем кадра техничко-технолошке струке. Након 2007. год. и успешно реализоване акредитације, школа је добила назив **"Висока техничка школа струковних студија"**, Под овим именом је у протеклих дванаест година постале препознатљива у свету високог образовања и на тржишту рада. Одлуком Владе Србије од јуна 2019. године, а на основу статусне промене, постала је део модерне високообразоване установе Академије техничко-васпитачких струковних студија Ниш.

На Одсеку Ниш се реализује укупно осам студијских програма, шест на основним студијама: Индустријско инжењерство, Друмски саобраћај, Комуникационе технологије, Савремене рачунарске технологије, Грађевинско инжењерство и Заштита животне средине и два програма на мастер струковним студијама: Управљање отпадом и Мултимедијалне комуникационе технологије, а у завршној фази акредитације су још 4 мастер програма: Информационе технологије и системи, Друмски саобраћај и транспорт, Производно информационе технологије и Грађевинске конструкције и управљање изградњом.

Одсек Ниш има дугу преко 40 година традицију образовања у областима машинства, електротехнике, грађевине, саобраћаја. Програми се реализују у складу са Законом о високом образовању и одлукама Комисије за акредитацију и проверу квалитета Републике Србије КАПК. У складу са дозволама за рад и уверењима о акредитацији студијских програма, Одсек Ниш уписује укупно 360 студената на основним студијама на шест студијских програма од којих се 205 школује о трошку буџета и 155 самофинансирајућих студената, а на мастер струковним студијама, укупно 192 самофинансирајућа студената.



Акредитација студијских програма

Студијски програми који се реализују на ОДСЕКУ НИШ; акредитовани су од стране Комисије за акредитацију и проверу квалитета Републике Србије КАПК, а дозвола за рад је издата од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Основне студије (I степен високог образовања)

Број решења	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ	Стручни назив - звање:
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	ИНДУСТРИЈСКО ИНЖЕЊЕРСТВО	Струковни инжењер индустријског инжењерства
612-00-01172/2012-04 од 07.06.2013.	ДРУМСКИ САОБРАЋАЈ	Струковни инжењер саобраћаја
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	КОМУНИКАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ	Струковни инжењер електротехнике и рачунарства
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	САВРЕМЕНЕ РАЧУНАРСКЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ	Струковни инжењер електротехнике и рачунарства
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	ГРАЂЕВИНСКО ИНЖЕЊЕРСТВО	Струковни инжењер грађевинског инжењерства
612-00-02319/2014-04 од 12.12.2014.	ЗАШТИТА ЖИВОТНЕ СРЕДИНЕ	Струковни инжењер заштите животне средине

Мастер студије (II степен високог образовања)


Број решења	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ	Стручни назив - звање:
612-00-00862/2017-06 од 30.06.2017.	УПРАВЉАЊЕ ОТПАДОМ	Струковни мастер инжењер заштите животне средине
612-00-00077/2014-04 од 28.03.2014.	МУЛТИМЕДИЈАЛНЕ КОМУНИКАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ	Струковни мастер инжењер електротехнике и рачунарства

Мастер студије (II степен високог образовања) у поступку акредитације

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ	Стручни назив - звање:
Информационе технологије и системи	Струковни мастер инжењер машинства
Друмски саобраћај и транспорт	Струковни мастер инжењер саобраћаја
Производно информационе технологије	Струковни мастер инжењер информационих технологија и система
Грађевинске конструкције и управљање изградњом	Струковни мастер инжењер грађевинарства

Диплома

После завршетка студија, студенту се издају **диплома о стеченом високом образовању и додатак дипломи**. Диплома садржи назив и седиште високошколске установе, назив завршеног студијског програма, стечени степен високог образовања, стручни назив, постигнут број ЕСПБ бодова, просечну оцену као и друге прописане елементе. Додатак дипломи издаје се на српском језику а на захтев носиоца дипломе и на енглеском језику.

 **РЕПУБЛИКА СРБИЈА**


АКАДЕМИЈА ТЕХНИЧКО-ВАСПИТАЧКИХ СТРУКОВНИХ СТУДИЈА - ОДСЕК НИШ
Оснивач: РЕПУБЛИКА СРБИЈА

Дозволу за рад број: _____ од _____ године издало је
Министарство просвете Републике Србије, Београд

ДИПЛОМА

рођена _____ године, _____
уписана школске _____ године, а дана _____ године завршила је
основне струковне студије ПРВОГ СТЕПЕНА на студијском програму _____
обима 180 (ста осамдесет) бодова ЕСПБ
са просечном оценом _____.

На основу тога издаје се ова диплома о стеченом ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ и стручном називу _____
У Нишу _____ године
Директор _____
ОС – 000000

 **РЕПУБЛИКА СРБИЈА**

АКАДЕМИЈА ТЕХНИЧКО-ВАСПИТАЧКИХ СТРУКОВНИХ СТУДИЈА - ОДСЕК НИШ

ДОДАТАК ДИПЛОМИ
Важи само уз диплому

број _____ издату _____ године

Додатак дипломи омогућаје опис природе, нивоа, повезаности, садржаја и статуса студија које је похађало и успешно завршило лице наведено у дипломи уз коју је овај додаток издат. Информације морају бити наведене у свик осам поглавља, а тамо где нема података треба дати објашњење о разлогу зашто их нема.

1. ПОДАЦИ О ИМАОЦУ ДИПЛОМЕ

1.1 Име: _____

1.2 Презиме: _____

1.3 Датум рођења: _____

1.4 Број индекса студента: _____ ЈМБГ: _____

2. ПОДАЦИ О СТЕЧЕНОЈ ДИПЛОМИ

2.1 Стечени стручни назив: _____

2.2 Стручна област студија: _____

2.3 Назив и статус високошколске установе која издаје диплому:
ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА, самостална високошколска установа

2.4 Назив и статус високошколске установе која организује студије (уколико се разликује од 2.3):
Исто као под тачком 2.3

2.5 Језик на коме се одржава настава:
СРПСКИ

3. ПОДАЦИ О ВРСТИ И СТЕПЕНУ СТУДИЈА

3.1 Врста и степен студија:
Основне струковне студије, први степен

3.2 Дужина трајања студија:
Три године (шест семестара)

3.3 Услови уписа:
Кандидати са стеченим средњим образовањем у четворогодишњем трајању и положајем пријављени испитом или општом матуром или стручном матуром.

4. ПОДАЦИ О САДРЖАЈУ И ПОСТИГНУТИМ РЕЗУЛТАТИМА

4.1 Начин студирања:
Студије нису завршене на даљину

4.2 Назив и циљеви студијског програма: _____

4.3 Видети следећу страну:
4.4 Начин оцењивања:

Оцене	Значење оцене	Број поена од	до
10	десет	91	100
9	девет	81	90
8	осам	71	80
7	седм	61	70
6	шест	51	60
5	не прелазна	0	50

4.5 Просечна оцена: _____

Дипломе Академије техничко-васпитачких струковних студија које се стичу, су признате на тржишту рада, а у номенклатури националне службе запошљавања и тржишта рада наше дипломе се налазе:

1. Дипломе основних струковних студија, у рангу су са дипломама академских студија са обимом од 180 ЕСПБ. Ниво и врста образовања је ОСС - 6.1 степен.
2. Дипломе мастер струковних студија у рангу су са дипломама академских студија у обиму од 300 ЕСПБ. Ниво и врста образовања је МСС - 7.1 степен.

Наше дипломе признате су свуда у земљи и иностранству.

Простор и опрема

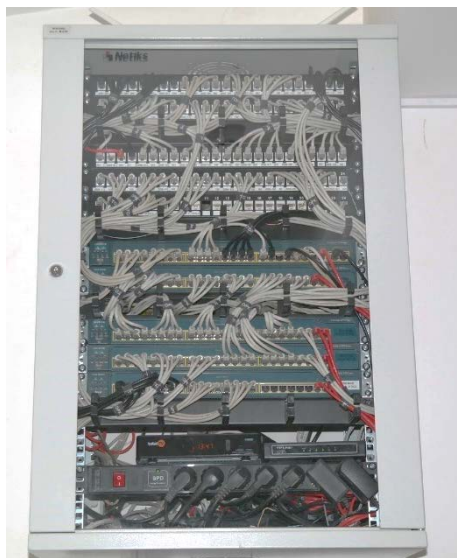
Студентима је у Одсеку Ниш доступно 1900 м², модерно опремљеног наставног и лабораторијског простора са свом потребном дидактичком опремом, као и рад са савременом мерном опремом, квалитетно наставно особље и знања потребна тржишту рада.

Редовно пратимо и анализирамо све постигнуте резултате сваког студента и заједно планирамо њихову каријеру.

Одсек Ниш је део универзитетске рачуарске мрежа са брзином интернета од 1 Gbps, која је део академске мреже Србије (AMPEC), На располагању су вам 6 модерно опремљених рачунарских лабораторија са преко 80 рачунара последње генерације, као и пет инфо-пултова. Претплатници смо MSDN AA програма, преко којег сви активни студенти, као и особље школе, могу да добију **потпуно бесплатно** лиценцирани Microsoft-ов софтвер (Windows 10, Windows 8, Visual Studio...), као и поједине делове Microsoft Office пакета (Visio, Access, Project, Groove, One-Note) које могу користити искључиво у научно-образовне сврхе.

Поред тога, омогућена је употреба специјализованих софтвера попут PC Crash, Pix4D. За потребе студената са департмана грађевинско инжењерство од компаније обезбеђене су едукативне лиценце за програме Radimpex Tower, ArmCAD i NormAG.

Такође, студентима је на располагању, и EDURoam сервис, који им омогућава брз и једноставан приступ интернету широм света. На Одсеку Ниша функционише и акредитована MikroTik академија. Студентима је на располагању и велика наставно стручна база са преко стотину успешних предузећа у којима можете да стичете практична знања и вештине.



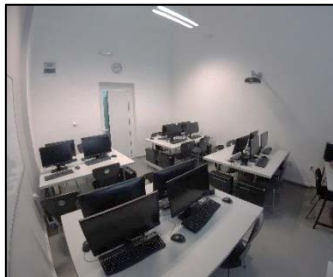
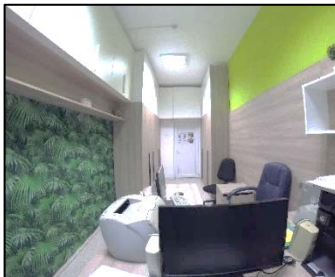


У оквиру библиотеке налази се радни простор од 20 м², простор са књигама и читаоница од 33 м² са 20 радних места. У оквиру радног простора се налазе најновији бројеви часописа, приручници и енциклопедије, као и рачунари за потребе студената. Фонд библиотеке се састоји од уџбеника, помоћних уџбеника, практикума, приручника и енциклопедија.

Библиотека располаже фондом књига са преко 5.000 библиотечких јединица. Библиотека је прикључена на академску мрежу, преко које је могућ сталан приступ сервисима КоБСОН-а, као и сви наслови Универзитетске библиотеке.

Перманентно се улаже у развој унапређење постојећих капацитета, а све у циљу да се запосленима и студентима пружи услове за несметани рад и развој. Простор и опрема се сваке године модернизују и унапређују и тиме се стварају предуслови да студенти стичу нова и унапређују постојећа знања. Резултат тога је и већи степен запошљивости студената.

Поред тога, на располагању су вам и услуге службе студентске евиденције, техничке службе. Ту су и студенти ментори. Студенти ментори су подршка бруцошима у сваком смислу те речи, Студенти ментори заједно са својим професорима олакшаће вам почетак студирања и помоћи да заједно пребудимо све потенцијалне проблеме и тешкоће.



Samsung Apps лабораторија функционише већ десет година на одсеку Ниш а резултат је сарадње са компанијом Samsung. Стоварени су идеални услови за учење како би студенти још у току студија били у могућности да самостално развијају напредне апликације за мобилне телефоне и да одмах након дипломирања буду у могућности да се запосле у струци. Посебан програм рада са најбољи студентима даје већ годинама одличне резултате и чини Одсек Ниш препознатљивом у целој земљи, региону и шире.



На Одсеку у Нишу функционише и акредитована Микро-Тик академија која својим студентима омогућава стицање индустријског сертификата МТСНА (Micro Tik Certified Network Association) из области управљања и конфигурације активних мрежних уређаја компаније MikroTik.

MikroTik сертификати представљају једну од најзначајнијих потврда знања и вештина у области управљања мрежне инфраструктуре чиме студенти ВТШ постају конкуренти на тржишту рада на позицијама систем администратор и систем мрежни инжењер.

Лабораторија за машине и материјале је место где студенти стичу знања из области материјала и њихове примене. Намењена је за испитивање структуре материјала (металографија), као и испитивања материјала које се заснивају на методама са разарањем. У ту сврху лабораторија је опремљена универзалном машином за испитивање материјала, уређајем за мерење тврдоће, микроскопом, машином за припрему металографских узорака, као и бројном опремом за мерење и контролу узорака.



Такође је опремљена и машинама за обраду резањем (струг, глодалица, стубна бушилица и ЦНЦ глодалица) где студенти стичу знања из области производних технологија и утицаја врсте материјала на процесе обраде резањем. Иако је лабораторија првенствено намењена за образовање студената, у њој се успешно обављају испитивања за потребе привреде и трећих лица.



Лабораторија напредних технологија представља место у коме студенти развијају своје дигиталне компетенције потребне савременој индустрији 4.0. Студенти креирају 3D CAD моделе производа и израђују их помоћу савремених 3D штампача. Лабораторија је опремљена са два 3D скенера као и савременим симулатором за израду производа на CNC машинама.

Софтвери попут SolidWorks-а и FeatureCAM-а пружају потпуну подршку у раду. У Лабораторији напредних технологија, врши се обука и полагање за међународно признате CSWA и CSWP сертификате. Током 2019. године, 27 наших студената је успешно положило и добило CSWA сертификате за рад у софтверу SolidWorks.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Наши студенти студијског програма Друмски саобраћај су активно укључени у истраживања и анализе. Посебно смо поносни на израду „Студије јавног градског превоза путника на територији града Ниша“ у којој су учествовали студенти свих година и нивоа студија. На тај начин дат је значајан допринос у изради Студије, која се у Нишу примењује од 2020. године.

Такође, велику посвећеност дајемо пројектима који су од суштинског значаја за привреду неког града. За потребе организовања и управљања услугом такси превоза, реализовали смо „Елаборат оптималног организовања такси превоза“ за град Крагујевац“ као и „Анализу оптималне организације са предлогом цена такси превоза на територији града Ниша“.

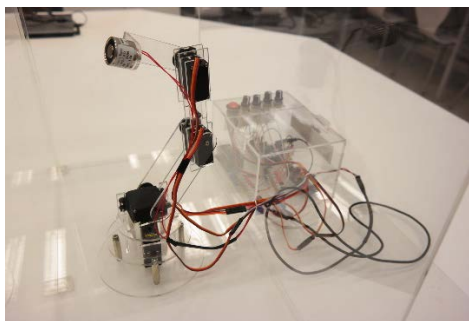
Активни смо учесници свих, акција, у граду, региону и шире које промовишу безбедност свих учесника у саобраћају.

Департман Саобраћајно инжењерство већ неколико година уназад сарађује са Агенцијом за безбедност саобраћаја у изради пројекта „Мерење индикатора перформанси безбедности саобраћаја“ на територији Републике Србије.

Поред овога, реализовали смо и бројне пројекте из области регулисања саобраћајних токова и паркирања. У склопу Департмана постоји Комисија за вештачење саобраћајних незгода.

Ове године успешно учествујемо у Erasmus+ пројекту TRAFSAF - „Унапређење безбедности саобраћаја у земљама западног Балкана кроз иновацију и развој курикулума за основне и мастер студије“, током кога ће бити набављена нова опрема, али и развијени наставни материјали и литература у овој области.

У реализацији студијског програма Заштита животне средине на Одсеку Ниш, ради лабораторија за заштиту животне средине које је формирана кроз ЕРАСУМУС+ 561821-EPP-1-2015-1-RS-EPPKA2 - CBHE-JP Waste management curricula development in partnership with public and private sector. Лабораторија се бави испитивањем чврстог отпада, његовој карактеризацији и преради. Одсек је део међународног програма „ЕКО-ШКОЛА“ која има за циљ да студенти постану главна покретачка снага промена у животној средини, кроз активно учење.



Студентска пракса

Студентска пракса је обавезни део наставног процеса, и реализује се у земљи и иностранству у фирмама и институцијама, са којим имамо уговоре о сарадњи. Сваком студенту обезбеђена је стручна пракса и могућност стицања практичних знања и искуства и коначно брзог запослења. Да би тај циљ у потпуности остварили анагажују се предавачи ван радног односа, стручњаци из привреде са драгоценим искуством.



У 2019. години успешно смо реализовали пројекат “Креирање одрживих иновација за унапређење конкурентности предузећа” подржаног од стране Града Ниша и КЛЕР-а, а захваљујући успешној сарадњи департмана Индустијског инжењерства са компанијом МИНГ Ковачница и у 2020. години ћемо реализовати и пројекат „Симултано



пројектовање иновираниог производа за унапређење конкурентности предузећа” којим унапређујемо производ потребан тржишту, повезујући тако науку са привредом. Кроз ове пројекте развијен је и модел плаћене стручне праксе, кроз коју је до сада прошао велики број студента од којих су неки добили стални посао у компанији. Тенденција је да се у будућности оствари већа сарадња са значајним привредним субјектима у региону са циљем даљег повезивања привреде и науке, као и да кроз већи број плаћених стручних пракси студенти лакше дођу до запослења после завршетка студија.

Наставно стручна база Одсека Ниш садржи више од 150 успешних фирми из Ниша и региона, које помажу нашим студентима да се профилишу у успешне инжењере и брже се запосле. Сваке године наша база се шири а послодавци постају све задовољнији. На нивоу студијског програма одређује се координатор из редова наставника који прати реализацију стручне праксе и који



са осталим наставницима прати ваш рад и помаже вам да успешно решавате све практичне задатке и проблеме који су саставни део наставног процеса.



Рад Одсека у Нишу препознат је од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије и оцењен је високо. У последње две године, одобрена је реализација три пројекта из програмске линије Развоја Високог образовања и то:

1. Опремање лабораторије за програмирање паметних уређаја – Internet of Things (VTŠ – Lab IoT);
2. Иновирање садржаја групе предмета из енергетске области на студијском програму Заштита животне средине ВТШ НИШ - Еколошка Енергија – EN-ECO;
3. Развој производно-информационих компетенција студената унапређењем наставних садржаја и опремање лабораторије напредних технологија.

Студентско организовање

Значајна улога студената је у обезбеђењу квалитета и остварује се кроз анкетаирање студената о квалитету установе, студијских програма, наставе и условима рада. Оцена педагошког рада наставника и сарадника базира се на оцени добијеној анкетаирањем.

Студентски парламент Школе, посебно је активан у реализацији стручних и волонтерских пракси, такмичења у научноистраживачким радовима. У сарадњи са Српским Ресорним Центром при Универзитету Г.В. Шухов у Белгороду - Русија, сваке године организује бесплатне курсеве руског језика. Спортске активности су наш заштитни знак (фудбал, кошарка, стони тенис, шах). Редовни смо учесници универзитетске лиге. Готово сваке године, наши студенти доносе победничке пехаре са спортских такмичења која се одржавају у оквиру „Сусрета високих школа струковних студија“.





Међународна сарадња и студентска размена

Одсек Ниш има изузетну међународну сарадњу и има потписане уговоре о пословно техничкој сарадњи са Универзитетом Св. Климент Охридски из Битоља, Универзитетом у Марибору Република Словенија, Технолошким Универзитетом из Солуна и Државним Универзитетом из Белгорода В.Г. Шухов, Руска Федерација, као и са Државним Универзитетом у Самари Руска Федерација. Студентска мобилност и мобилност наставног особља, стратешки развој јесу основе интернационализације. Наставно и ненаставно особље Одсека Ниш у протеклом периоду успешно је учествовала у реализацији неколико међународних пројеката који су имали за циљ јачање капацитета високо образовних установа.

Међународни пројекти у којима је учествовала ВТШ Ниш

- 517200-TEMPUS-1-2011-1-BETEMPUS -SMGR „Establishing and capacity building of the Southern Serbian Academy and the National Conference for Vocational Higher Education“;
- 517153-TEMPUS-1-2011-1-DETEMPUS-JPGR Conducting graduate surveys and improving alumni services for enhanced strategic management and quality improvement “CONGRAD“;
- TEMPUS 158781 „Occupational Safety and Health - degree curricula and lifelong learning“;
- 530577-TEMPUS-1-2012-1-RS-TEMPUS-JPCR Improvement of Product Development Studies in Serbia And Bosnia and Herzegovina;
- 561821-EPP-1-2015-1-RS-EPPKA2-CBHE-JP Waste management curricula development in partnership with public and private sector.
- 598551-EPP-1-2018-1-XK-EPPKA2-CBHE-JP Traffic safety in WB countires through curriculum innovation and development of undergraduate and masterstudies.
- 2019-1-RS01-KA103-000608 - Пројекат мобилности у области високог образовања (KA103).



Наши студенти на студентској размени у Русији

| Пријава на конкурс

Уз пријаву на конкурс, кандидати подносе на увид **ОРИГИНАЛНА ДОКУМЕНТА и фотокопије ових докумената:**

- ◆ Диплому (сведочанство) о положеном завршном испиту,
- ◆ Сведочанства свих разреда средње школе,
- ◆ Доказ о уплати накнаде за полагање пријемног испита из математике на жиро рачун Школе:

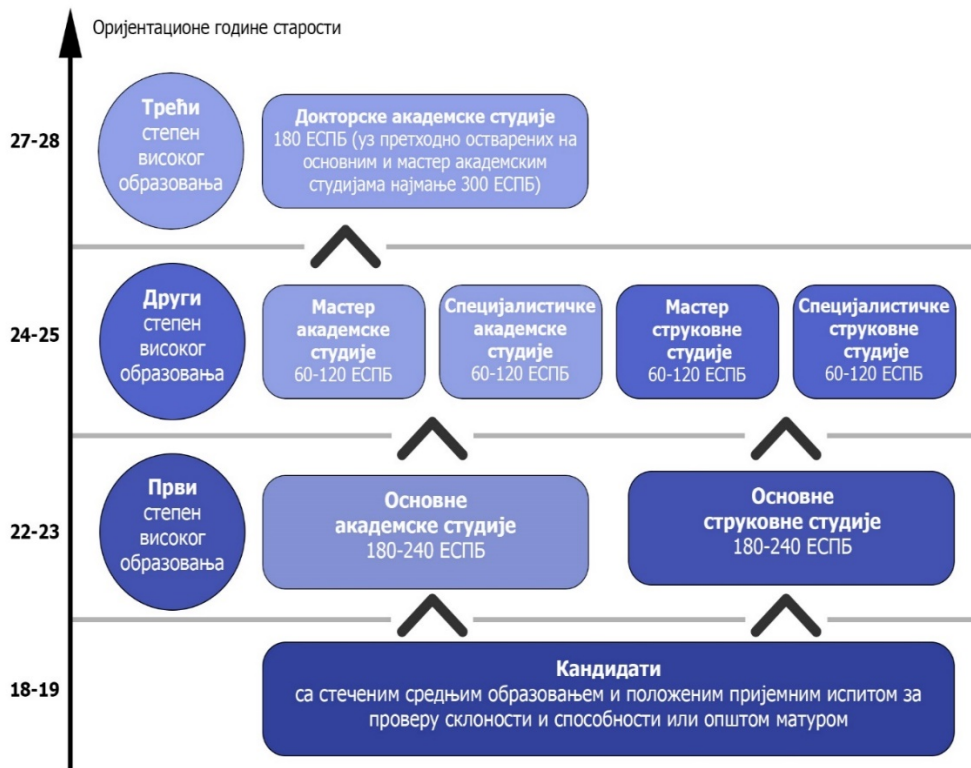
840-2111666-06
позив на број (одобрење) 02-2020

При предаји докумената, кандидати се јављају студентској служби (канцеларија 109) која се налази на првом спрату.

Након предаје докумената кандидат добија **потврду о поднетој пријави, коју чува, ради уписа или подизања докумената.**

За све информације кандидати се могу обратити студентској служби (канцеларија 109) или телефоном на број 018/588-039 или на мејл upis@vtsnis.edu.rs.

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМИ - КУРИКУЛУМИ



ОСНОВНЕ СТРУКОВНЕ СТУДИЈЕ

Студијски програм: Индустрijско инжењерство Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1	МАЈ 1.01	Математика 1	I	2	2	0	6
2	МЕЈ 1.02	Механика 1	I	2	3	0	7
3	ИНИ 1.08	Инжењерска информатика	I	2	0	2	6
4	СОР 1.04	Социологија рада	I	2	0	0	3
5	ТЕМ 1.05	Технички материјали	I	3	2	0	7
6	МАД 1.06	Математика 2	II	2	2	0	6
7	ТЕЈ 1.07	Технички енглески језик	II	2	2	0	4
8	ФИЗ 1.03	Физика	II	2	2	0	6
9	МЕД 1.09	Механика 2	II	3	3	0	8
10	ТЦН 1.10	Техничко цртање	II	2	3	0	7
ДРУГА ГОДИНА							
11	РАГ 1.11	Рачунарска графика	III	2	0	2	6
12	ОТМ 1.12	Отпорност материјала	III	2	2	0	5
13	ТЕР 1.13	Термоенергетика	III	2	2	0	6
14	ЕЛЕ 1.14	Електротехника са електроником	III	2	2	0	5
15	ОРП 1.15	Организација производње	III	2	2	0	4
16		Предмет изборног блока 1	III	2	0	0	4
17	СИК 1.16	Стандардизација и контрола квалитета	IV	2	2	0	5
18	ПТЈ 1.17	Производне технологије 1	IV	2	2	0	5
19	МАЕ 1.18	Машински елементи	IV	3	3	0	6
20	ТЕС 1.19	Технички системи	IV	2	2	0	5
21		Предмет изборног блока 2	IV	2	0	0	4
22		Предмет изборног блока 3	IV	2	2	0	5
ТРЕЋА ГОДИНА							
23	ПТД 1.20	Производне технологије 2	V	2	2	0	6
24	СМО 1.21	Савремене методе обраде	V	2	2	0	6
25	ОМС 1.22	Одржавање машинских система	V	3	2	0	6
26		Предмет изборног блока 4	V	2	2	0	6
27		Предмет изборног блока 4	V	2	2	0	6
28	ЦАМ 1.23	САМ системи	VI	3	3	0	5
29	СИП 1.24	Сензори и претварачи	VI	2	2	0	5
30		Предмет изборног блока 5	VI	3	2	0	5
31		Предмет изборног блока 5	VI	3	2	0	5
32	СТП 1.32	Стручна пракса	VI				3
33	ЗАР 1.31	Завршни рад	VI				7
Укупно ЕСПБ							180

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1	БИЗ 1.27	Безбедност и здравље на раду	2	0	0	4
2	КИЗ 1.28	Корозија и заштита материјала	2	0	0	4
3	ОРА 1.29	Одрживи развој	2	0	0	4
Предмети изборног блока 2.						
1	ОСМ 1.30	Основе менаџмента	2	0	0	4
2	ПОК 1.31	Пословне комуникације	2	0	0	4
3	МЕК 1.32	Менаџмент кадрова	2	0	0	4
Предмети изборног блока 3.						
1	ТРИ 1.33	Теорија ризика	2	2	0	5
2	ТСД 1.34	Технике спајања делова	2	2	0	5
3	МЕП 1.35	Механизација претовара	2	2	0	5
Предмети изборног блока 4.						
1	ЕИО 1.36	Енергија и околина	2	2	0	6
2	АИП 1.37	Алати и прибори	2	2	0	6
3	РЗП 1.38	Развој производа	2	2	0	6
4	ХПС 1.39	Хидраулички и пнеуматски системи	2	2	0	6
Предмети изборног блока 5.						
1	РЕТ 1.40	Рециклажне технологије	3	2	0	5
2	ИСУ 1.41	Интегрисани системи управљања	3	2	0	5
3	УОТ 1.42	Управљање отпадом	3	2	0	5
4	КГХ 1.43	КГХ системи	3	2	0	5

Напомена:

- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студенти стичу следеће компетенције:

- да прикупљају, анализирају и систематизују теоретске и практичне проблеме из инжењерске праксе и да предвиде решења и последице при решавању тих проблема,
- да владају основним дисциплинама у области индустријског инжењерства, као и савременим информационим технологијама на нивоу који се очекује од инжењера овог типа и у земљама ЕУ,
- да користе литературу и инжењерске алате за прорачуне, моделирање, симулацију, а све у циљу овладавања знањима из овог подручја,
- да примењују инжењерске, организационе и административне мере за безбедан рад са машинама, уређајима и опремом.

Студијски програм: Друмски саобраћај
Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1	МАЈ 1.01	Математика 1	I	2	2	0	6
2	МЕЈ 1.02	Механика 1	I	2	3	0	7
3	ИНИ 1.03	Инжењерска информатика	I	2	0	2	6
4	СОР 1.04	Социологија рада	I	2	0	0	3
5	УСТ 1.05	Увод у саобраћај и транспорт	I	3	2	0	7
6	МАД 1.06	Математика 2	II	2	2	0	6
7	ТЕЈ 1.07	Технички енглески језик	II	2	2	0	4
8	ФИЗ 1.08	Физика	II	2	1	1	6
9	МЕД 1.09	Механика 2	II	3	3	0	8
10	ТЦН 1.10	Техничко цртање	II	2	1	2	7
ДРУГА ГОДИНА							
11	ЕЛЕ 1.11	Електротехника са електроником	III	2	1	1	5
12	БЕС 1.12	Безбедност саобраћаја	III	3	2	1	7
13	ПЈГ 1.13	Паркирање и јавне гараже	III	3	2	1	7
14	МПТ 1.14	Механизација претовара	III	2	2	0	5
15		Предмет изборног блока 1	III	2	2	0	5
16	ПУТ 1.15	Путеви	IV	2	2	0	6
17	МОВ 1.16	Моторна возила	IV	3	2	0	7
18	ОКВ 1.17	Оспособљавање кандидата за возаче	IV	3	2	1	7
19	МЕЛ 1.18	Машински елементи	IV	3	3	0	6
20		Предмет изборног блока 2	IV	2	2	0	5
ТРЕЋА ГОДИНА							
21	ЈГП 1.19	Јавни градски превоз	V	3	2	1	7
22	ТБК 1.20	Техника безбедности и контроле саобраћаја	V	3	2	1	7
23		Предмет изборног блока 3	V	3	2	1	7
24		Предмет изборног блока 3	V	3	2	1	7
25	ТДС 1.21	Технологија друмског саобраћаја	VI	3	2	1	7
26	ТРС 1.22	Теорија и регулисање саобраћајних токова	VI	3	2	1	7
27		Предмет изборног блока 4	VI	3	2	1	7
28		Стручна пракса	VI				4
29		Завршни рад	VI				7
Укупно ЕПСБ							183

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1	МЕС 1.23	Менаџмент у саобраћају	2	2	0	5
2	СИА 1.24	Статистика и анализа	2	2	0	5
3	САП 1.25	Саобраћајна психологија	2	2	0	5
Предмети изборног блока 2.						
1	УШВ 1.26	Утврђивање штете на возилима	2	2	0	5
2	ПКС 1.27	Пословне комуникације у саобраћају	2	2	0	5
3	УПЛ 1.28	Урбанистичко планирање	2	2	0	5
Предмети изборног блока 3.						
1	МТШ 1.29	Међународни транспорт и шпедиција	3	2	1	7
2	ОСТ 1.30	Осигурање у саобраћају и транспорту	3	2	1	7
3	ПЛС 1.31	Планирање саобраћаја	3	2	1	7
Предмети изборног блока 4.						
1	КОТ 1.32	Комбиновани транспорт	3	2	1	7
2	ЕОВ 1.33	Експлоатација и одржавање моторних возила	3	2	1	7
3	ИТС 1.34	Информационе технологије у саобраћају	3	2	1	7

Напомена:

- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем, овог студијског програма, студенти су способни да решавају практичне проблеме из праксе саобраћајног инжењерства и стичу следеће компетенције:

- Анализа и превенција саобраћајних незгода, анализа система обуке возача, предлагање мера и акција за повећање безбедности саобраћаја,
- Планирање мобилности, решавање проблема паркирања у урбаним срединама, анализа саобраћајних токова и пројектовање саобраћајне сигнализације,
- Организација рада у путничком у теретном саобраћају,
- Праћење робних токова у међународном робном промету, организовање транспорта применом модерних технологија комбинованог транспорта.

Студијски програм: Комуникационе технологије
Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МАТ1 3.01	Математика 1	I	2	2	0	6
2.	ЕТ1 3.02	Основи електротехнике 1	I	3	3	0	8
3.	ФИЗ 3.03	Физика	I	2	1	1	6
4.	АСП 3.04	Алгоритми и структуре података	I	2	2	0	6
5.		Предмет изборног блока 1	I	2	0	0	4
6.	ОРТ 3.07	Основи рачунарске технике	II	2	2	0	6
7.	ОСЕ 3.06	Основи електронике	II	2	1	1	6
8.	ОСП 3.27	Основи програмирања	II	2	1	1	6
9.	МАТ2 3.26	Математика 2	II	2	2	0	6
10.		Предмет изборног блока 2	II	2	2	0	6
ДРУГА ГОДИНА							
11.	ДИЕ 3.10	Дигитална електроника	III	2	1	1	6
12.	ДИТ 3.09	Дигиталне телекомуникације	III	2	2	1	7
13.	РАМ 3.11	Рачунарске мреже	III	2	1	1	6
14.		Предмет изборног блока 3	III				4
15.		Предмет изборног блока 4	III				6
16.	КТС 3.12	Кабловски ТК системи	IV	2	2	1	7
17.	ЕМИ 3.14	Електронска мерна инструментација	IV	2	1	1	6
18.	МРС 3.13	Мрежни сервиси	IV	2	1	1	6
19.		Предмет изборног блока 5	IV				6
20.		Предмет изборног блока 5	IV				6
ТРЕЋА ГОДИНА							
21.	ЕНГ2 3.15	Технички енглески 2	V	2	2	0	4
22.	МОК 3.16	Мобилне комуникације	V	2	2	0	6
23.	ДТВ 3.17	Дигитални ТВ системи	V	2	2	0	6
24.	ММС 3.18	Мултимедијални сигнали и системи	V	2	2	0	6
25.		Предмет изборног блока 6	V				6
26.	БТК 3.19	Бежични телекомуникациони системи	VI	3	2	1	6
27.	ЗПМ 3.20	Заштита података у комуникац. мрежама	VI	2	2	1	6
28.	АНС 3.21	Аntenски системи	VI	2	2	1	6
29.		Предмет изборног блока 7	VI				5
30.	СТП 3.22	Стручна пракса					3
31.	ЗАВ 3.23	Завршни рад					6
Укупно ЕПСБ							180

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1.	СОР 3.24	Социологија рада	2	0	0	4
2.	ПОК 3.25	Пословне комуникације	2	0	0	4
Предмети изборног блока 2.						
3.	ЕТ2 3.08	Основи електротехнике 2	2	2	0	6
4.	ОСТ 3.05	Основи телекомуникација	2	2	0	6
Предмети изборног блока 3.						
3.	ЕНГ1 3.28	Технички енглески 1	2	2	0	4
4.	МЕК 3.29	Менаџмент кадрова	2	0	0	4
Предмети изборног блока 4.						
1.	АПР 3.30	Архитектура персоналних рачунара	2	0	2	6
2.	БАП 3.31	Базе података	2	1	1	6
3.	ПШК 3.32	Пројектовање штампаних кола	2	1	1	6
4.	КОС 3.33	Комутациони системи	2	2	0	6
Предмети изборног блока 5.						
1.	АРМ 3.34	Администрирање рачунарских мрежа	2	1	1	6
2.	ООП 3.35	Објектно оријентисано програмирање	2	1	1	6
3.	МКС 3.38	Микрорачунарски системи	2	1	1	6
4.	ТЕМ 3.36	Телекомуникационе мреже	2	2	0	6
5.	ППР 3.37	Пројектовање помоћу рачунара	2	1	1	6
Предмети изборног блока 6.						
1	КУД 3.39	Квалитет услуга дигиталних комуникац. мрежа	2	2	0	6
2.	ВПР 3.41	Веб програмирање	2	1	1	6
3.	СКО 3.40	Сателитске комуникације	2	2	0	6
Предмети изборног блока 7.						
1	ИПТ 3.42	ИП телефонија	2	1	1	5
2.	АБП 3.43	Администрирање база података	2	1	1	5
3.	ОПТ 3.44	Оптоласерска техника	2	1	1	5
4.	ЕАК 3.45	Електроакустика	2	2	0	5

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компетенције:

- да пројектује и одржава телекомуникационе системе, сателитску и кабловску опрему,
- да пројектује, изгради и одржава кабловске дистрибуиране системе, кућне информационе системе, Интернет систем и GPS (Global Position System) системе,
- да пројектује, примени, одржава бежичне мобилне комуникације, рачунарске мреже, аудио, видео и опрему за надзор и заштиту објеката.

Студијски програм: Савремене рачунарске технологије
Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МАТ1 4.01	Математика 1	I	2	2	0	6
2.	ЕТ1 4.02	Основи електротехнике 1	I	3	3	0	8
3.	ФИЗ 4.03	Физика	I	2	1	1	6
4.	АСП4.04	Алгоритми и структуре података	I	2	2	0	6
5.		Предмет изборног блока 1	I	2	0	0	4
6.	ОРТ4.07	Основи рачунарске технике	II	2	2	0	6
7.	ОСЕ4.06	Основи електронике	II	2	1	1	6
8.	ОСП4.05	Основи програмирања	II	2	1	1	6
9.	МАТ24.08	Математика 2	II	2	2	0	6
10.		Предмет изборног блока 2	II	2	2	0	6
ДРУГА ГОДИНА							
11.	ОПС 4.09	Оперативни системи	III	2	2	1	7
12.	БАП 4.10	Базе података	III	2	1	1	6
13.	ИНТ 4.11	Интернет технологије	III	2	1	2	7
14.		Предмет изборног блока 3	III	2	2	0	4
15.		Предмет изборног блока 4	III	2	1	1	6
16.	ООП 4.12	Објектно оријентисано програмирање	IV	2	1	1	6
17.	МКС 4.13	Микрорачунарски системи	IV	2	1	1	6
18.	ВЕБ 4.14	Веб дизајн	IV	2	0	2	6
19.		Предмет изборног блока 5	IV	2	1	1	6
20.		Предмет изборног блока 5	IV	2	1	1	6
ТРЕЋА ГОДИНА							
21.	ЕНГ2 4.15	Технички енглески 2	V	2	2	0	4
22.	НЕТ 4.16	НЕТ технологије	V	2	0	2	6
23.	АМК 4.17	Архитектура микроконтролера	V	2	1	1	6
24.	КСС 4.18	Клијент сервер системи	V	2	1	1	6
25.		Предмет изборног блока 6	V	2	1	1	6
26.	ЕЛП 4.19	Електронско пословање	VI	2	1	1	6
27.	РМК 4.20	Примена микроконтролера	VI	2	2	1	6
28.	СОИ 4.21	Софтверско инжењерство	VI	3	2	1	7
29.		Предмет изборног блока 7	VI	2	1	1	5
30.	ЗАР 4.23	Завршни рад					6
31.	СТП 4.22	Стручна пракса					3
Укупно ЕПСБ							181

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1.	СОР4.24	Социологија рада	2	0	0	4
2.	ПОК4.25	Пословне комуникације	2	0	0	4
Предмети изборног блока 2.						
1.	ЕТ2 4.26	Основи електротехнике 2	2	2	0	6
2.	ОСТ4.27	Основи телекомуникација	2	2	0	6
Предмети изборног блока 3.						
1.	ЕНГ1 4.28	Технички енглески 1	2	2	0	4
2.	МЕК 4.29	Менаџмент кадрова	2	0	0	4
Предмети изборног блока 4.						
1.	РАМ 4.30	Рачунарске мреже	2	1	1	6
2.	ВБА 4.33	ВБА програмирање	2	1	1	6
3.	ПШК 4.32	Пројектовање штампаних кола	2	1	1	6
4.	ДИЕ 4.31	Дигитална електроника	2	1	1	6
Предмети изборног блока 5.						
1.	МРС 4.34	Мрежни сервиси	2	1	1	6
2.	ВЕГ 4.37	Векторска графика	2	2	0	6
3.	АРМ 4.38	Администрирање рачунарских мрежа	2	1	1	6
4.	ППР 4.35	Пројектовање помоћу рачунара	2	1	1	6
5.	ЕМИ 4.36	Електронска мерна инструментација	2	1	1	6
6.	ТЕМ 4.39	Телекомуникационе мреже	2	2	0	6
Предмети изборног блока 6.						
1.	НСП 4.42	Напредне структуре података	2	1	1	6
2.	ВПр 4.40	Веб програмирање	2	1	1	6
3.	МКИ 4.41	Микроконтролери и интерфејси	2	1	1	6
Предмети изборног блока 7.						
1.	АБП 4.43	Администрирање база података	2	1	1	5
2.	ПМУ 4.44	Програмирање мобилних уређаја	2	1	1	5
3.	ОПТ 4.45	Оптоласерска техника	2	1	1	5
4.	СЗП4.46	Сензори и претварачи	2	2	0	5

Напомена:

- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компетенције:

- да програмира апликације,
- да пројектује, креира и одржава базе података,
- да пројектује и администрира рачунарске мреже,
- да инсталира, подешава и одржава рачунарску и мрежну опрему,
- да програмира на WEB –у,
- да програмира мобилне уређаје,
- да програмира микроконтролере,
- да повезује и контролише различите уређаје путем рачунара.

Студијски програм: Грађевинско инжењерство
 Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МА1 5.01	Математика 1	I	2	2	0	6
2.	СОР 5.02	Социологија рада	I	2	0	0	3
3.	ФИЗ 5.03	Физика	I	2	2	0	6
4.	ЕНГ 5.04	Технички енглески језик	I	2	2	0	4
5.	ТЕМ 5.05	Техничка механика	I	2	3	0	6
6.	НАГ 5.06	Нацртна геометрија	I	2	3	0	6
7.	ГРК 5.07	Грађевинске конструкције	II	2	2	0	6
8.	ГЕО 5.08	Геодезија	II	3	2	0	6
9.	ГМ1 5.09	Грађевински материјали 1	II	2	3	0	6
10.	РАТ 5.10	Рачунарска техника	II	2	0	2	5
11.	МА2 5.11	Математика 2	II	2	2	0	6
ДРУГА ГОДИНА							
12.	СТК 5.12	Статика конструкција	III	2	3	0	6
13.	ГМТ 5.13	Грађевинска механизација и тех. грађења	III	2	2	0	6
14.	РАГ 5.14	Рачунарска графика	III	2	0	2	6
15.	ОТМ 5.15	Отпорност материјала	III	2	2	0	5
16.		Предмет изборног блока 1	III	2	2	0	5
17.		Предмет изборног блока 2	III	2	0	0	4
18.	БЕК 5.16	Бетонске конструкције	IV	2	4	0	7
19.	ХИД 5.17	Хидротехника	IV	2	3	0	6
20.	СА1 5.18	Саобраћајнице 1	IV	3	2	0	6
21.		Предмет изборног блока 3	IV	2	0	0	4
22.		Предмет изборног блока 4	IV	3	2	0	5
ТРЕЋА ГОДИНА							
23.	МЕТ 5.19	Механика тла и фундације	V	3	2	0	6
24.	СА2 5.20	Саобраћајнице 2	V	3	2	0	6
25.	ОРГ 5.21	Организација радова у грађевин. са менаџ.	V	2	4	0	7
26.		Предмет изборног блока 5	V	2	2	0	5
27.		Предмет изборног блока 6	V	2	2	0	6
28.	ЗРИ 5.22	Завршни радови и инсталације	VI	2	4	0	6
29.	ЕЕФ 5.23	Енергетска ефикасност у зградарству	VI	3	3	0	5
30.	УПЛ 5.24	Урбанистичко планирање	VI	3	2	0	5
31.		Предмет изборног блока 7	VI	2	0	0	4
32.	СТП 5.25	Стручна пракса	VI				3
33.	ДИП 5.26	Завршни рад	VI				7
Укупно ЕСПБ							180

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1.	ЕКИ 5.27	Еколошко инжењерство	2	2	0	5
2.	ГРМ 5.28	Грађевински материјали 2	2	2	0	5
Предмети изборног блока 2.						
1.	УЖР 5.29	Управљање животним ресурсима	2	0	0	4
2.	БИЗ 5.30	Безбедност и здравље на раду	2	0	0	4
Предмети изборног блока 3.						
1.	МЕК 5.31	Менаџмент кадрова	2	0	0	4
2.	ПОК 5.32	Пословне комуникације	2	0	0	4
Предмети изборног блока 4.						
1.	КГХ 5.33	КГХ системи	3	2	0	5
2.	ТДМ 5.34	ЗД моделовање	3	2	0	5
Предмети изборног блока 5.						
1.	ИНС 5.35	Информациони системи	2	2	0	5
2.	СОГ 5.36	Софтвери у грађевинарству	2	2	0	5
Предмети изборног блока 6.						
1.	ПРО 5.37	Пројектовање објеката високоградње	2	2	0	6
2.	ДМК 5.38	Дрвене и металне конструкције	2	2	0	6
Предмети изборног блока 7.						
1.	РЕГ 5.39	Регулатива у грађевинарству	2	0	0	4
2.	УКВ 5.40	Управљање квалитетом и вредносно инжењерство	2	0	0	4

Напомена:

- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компетенције:

- да користи релевантне материјале при извођењу грађевинских објеката,
- да користи рачунарске технологије у циљу примене практичних знања ради пројектовања у грађевинарству,
- да користи одговарајућу опрему, примени нове технологије у грађевинарству,
- да руководи појединим фазама радова у оквиру високоградње, нискоградње и хидроградње
- да обавља инспекцијске послове у органима локалне самоуправе,
- да пројектује поједине фазе у оквиру израде идејног и главног пројекта.

Студијски програм: Заштита животне средине
Распоред предмета по семестрима и годинама студија

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МАЈ 6.01	Математика 1	I	2	2	0	6
2.	УПЗ 6.02	Уводни принципи заштите животне средине	I	3	2	0	7
3.	ИНИ 6.08	Инжењерска информатика	I	2	1	1	6
4.	СОР 6.04	Социологија рада	I	2	0	0	3
5.	ТЕМ 6.05	Технички материјали	I	3	2	0	7
6.	МАД 6.06	Математика 2	II	2	2	0	6
7.	ТЕЈ 6.07	Технички енглески језик	II	2	2	0	4
8.	ФИЗ 6.03	Физика	II	2	2	0	6
9.	ТМЕ 6.09	Техничка механика	II	3	2	0	8
10.	ТЦН 6.10	Техничко цртање	II	2	3	0	7
ДРУГА ГОДИНА							
11.	ОРА 6.12	Одрживи развој	III	2	2	0	5
12.	ЕТП 6.11	Еко стандарди и технички прописи	III	2	0	0	4
13.	СИА 6.17	Статистика и анализа	III	2	2	0	5
14.	ТЕР 6.15	Термоенергетика	III	2	2	0	6
15.	ЕЛЕ 6.14	Електротехника са електроником	III	2	2	0	5
16.		Предмет изборног блока 1.	III	2	2	0	6
17.	АИЕ 6.18	Алтернативни извори енергије	IV	2	2	0	6
18.	ЕЕФ 6.16	Енергетска ефикасност	IV	2	2	0	6
19.	МКП 6.13	Мерење и контрола параметара жив. средине	IV	2	2	0	5
20.	ЕИО 6.19	Енергија и околина	IV	2	3	0	6
21.		Предмет изборног блока 2.	IV	2	0	0	3
22.		Предмет изборног блока 2.	IV	2	0	0	3
ТРЕЋА ГОДИНА							
23.	ГЖС 6.21	Градитељство и животна средина	V	2	2	0	5
24.	ПУТ 6.22	Процена утицаја на животну средину	V	2	2	0	4
25.	УПО 6.20	Управљање отпадом	V	2	2	0	5
26.		Предмет изборног блока 3.	V	2	2	0	6
27.		Предмет изборног блока 3	V	2	2	0	6
28.	ОМС 6.23	Системи заштите животне средине	VI	3	2	0	6
29.	РЕТ 6.24	Рециклажне технологије	VI	2	3	0	6
30.		Предмет изборног блока 4.	VI	2	3	0	6
31.		Предмет изборног блока 4.	VI	2	3	0	6
32.	СПР 6.25	Стручна пракса	VI	0	0	3	3
33.	ЗАР 6.26	Завршни рад	VI	0	0	6	7
Укупно ЕСПБ							180

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1.	КЗМ 6.28	Корозија и заштита материјала	2	2	0	6
2.	МИК 6.27	Мерење и контрола параметара радне средине	2	2	0	6
Предмети изборног блока 2.						
1.	УЖР 6.32	Управљање животним ресурсима	2	0	0	3
2.	МЕК 6.29	Менаџмент кадрова	2	0	0	3
3.	ПОК 6.31	Пословне комуникације	2	0	0	3
4.	БЗР 6.30	Безбедност и здравље на раду	2	0	0	3
Предмети изборног блока 3.						
1.	ИЕК 6.33	Индустријска екологија	2	2	0	6
2.	ЕМС 6.34	Систем менаџмента заштитом животне средине	2	2	0	6
3.	ЕКД 6.35	Еко дизајн	2	2	0	6
4.	ИНС 6.36	Информациони системи	2	2	0	6
Предмети изборног блока 4.						
1.	ЗГП 6.37	Зрачење и глобалне промене	2	3	0	6
2.	БИВ 6.39	Бука и вибрације у радној и животној средини	2	3	0	6
3.	ТЕР 6.38	Теорија ризика	2	3	0	6
4.	ОДИ 6.40	Обновљиви дисперзни извори напајања	2	3	0	6

Напомена:

- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компетенције:

- да прикупљају, анализирају и систематизују теоретске и практичне проблеме из области заштите животне средине и да предвиде решења и последице при решавању тих проблема,
- да примењују законе и прописе, у складу са светским, привредним и друштвеним развојем, као и са принципима заштите животне средине,
- да владају основним дисциплинама у области просторног планирања, као и заштите животне средине и савременим информационим технологијама,
- да пројектују поједине фазе у оквиру израде идејног и главног пројекта у области просторног планирања.

МАСТЕР СТРУКОВНЕ СТУДИЈЕ

Закон о Високом образовању дозволио је струковним школама да развију курикулуме којима ће будући студенти стећи диплому мастера струковних студија.

Програм на мастер студијама је организован тако да се наставља након основних студија. После стицања дипломе струковног инжењера у трајању од 3 године и са остварених 180 ЕСПБ бодова, студенти могу да наставе студирање и на мастер програмима у трајању од 2 године. На тај начин стичу **звање струковног мастер инжењера**, диплому **2. степена високог образовања**, са остварених **120 ЕСПБ бодова**, што је са основним студијама укупно **300 ЕСПБ бодова**.

На одеску се реализују следећи мастер студијски програми:

- **УПРАВЉАЊЕ ОТПАДОМ**
- **МУЛТИМЕДИЈАЛНЕ КОМУНИКАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ**
- **ИНФОРМАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ И СИСТЕМИ**
(у поступку акредитације)
- **ДРУМСКИ САОБРАЋАЈ И ТРАНСПОРТ**
(у поступку акредитације)
- **ПРОИЗВОДНО-ИНФОРМАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ**
(у поступку акредитације)
- **ГРЂЕВИНСКЕ КОНСТРУКЦИЈЕ И УПРАВЉАЊЕ ИЗГРАДЊОМ**
(у поступку акредитације)

Програми који су акредитовани настали су у сарадњи са релевантним партнерима из привреде, јавног сектора, али и у сарадњи са међународним универзитетима током сарадње на различитим пројектима.

Важан сегмент мастер струковних студија које се изводе на Одсеку Ниш је управо стручна пракса која се изводи у партнерству са приватним и јавним сектором. Стручна пракса представља основу за израду мастер рада и то је важна разлика која разликује струковног мастер инжењера од академског мастер инжењера.

Студијски програм: Управљање отпадом

Ред. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	ЕСПБ
Прва година				
1.	Директиве и стандарди у заштити животне средине	I	обавезни	4
2.	Социјална екологија	I	обавезни	5
3.	Рециклабилни материјали	I	обавезни	8
4.	Логистика отпада	I	обавезни	7
5.	Предмет изборног блока 1	I	изборни	6
6.	Испитивање и карактеризација отпада	II	обавезни	6
7.	Управљање пројектима	II	обавезни	6
8.	Технологије прераде отпада	II	обавезни	7
9.	Стручна пракса 1	II	обавезни	4
10.	Предмет изборног блока 2	II	изборни	7
Друга година				
11.	Енергетски потенцијал отпада	III	обавезни	6
12.	Сензорски системи	III	обавезни	6
13.	Предмет изборног блока 3	III	изборни	7
14.	Предмет изборног блока 4	III	изборни	7
15.	Стручна пракса 2	III	обавезни	4
16.	Обрада и анализа података	IV	обавезни	6
17.	Одрживост управљања отпадом	IV	обавезни	6
18.	Примењени истраживачки рад	IV	обавезни	8
19.	Завршни мастер рад	IV		10

Листа изборних предмета

Р.б.	Назив предмета	Сем.	ЕСПБ
Предмет изборног блока 1 (бира се један од два понуђена предмета)			
1.	Софтверски алати у заштити животне средине	I	6
2.	Пословни енглески	I	6
Предмет изборног блока 2 (бира се један од два понуђена предмета)			
3.	Екодизајн	II	7
4.	Пројектовање депонија	II	7
Предмет изборног блока 3 (бира се један од два понуђена предмета)			
5.	Управљање индустријским отпадом	III	7
6.	Управљање биоразградивим отпадом	III	7
Предмет изборног блока 4 (бира се један од два понуђена предмета)			
7.	Мониторинг постројења за третман отпада	III	7
8.	Технологија прераде отпадних вода	III	7

Студијски програм: Мултимедијалне комуникационе технологије

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	Обрада мултимедијалних сигнала	1	Обавезни	3	2	0	8
2.	Технике бежичног преноса	1	Обавезни	3	2	0	8
3.	Дигитални ТК системи	1	Обавезни	3	2	0	8
4.	Енглески језик	1	Обавезни	2	3	0	4
5.	Напредне ВЕБ технологије	2	Обавезни	3	2	0	7
6.	Мерења у ТК системима	2	Обавезни	3	2	0	6
7.	Бежичне сензорске мреже	2	Обавезни	3	2	0	7
8.	Стручна пракса 1	2	Обавезни	0	0	0	5
9.	<i>Предмет изборног блока 1</i>	2	Изборни	2	3	0	7
ДРУГА ГОДИНА							
10.	Активни мрежни уређаји	3	Обавезни	3	2	0	6
11.	Програмски алати за развој софтвера	3	Обавезни	3	2	0	6
12.	Мултимедијалне комуникације	3	Обавезни	3	2	0	6
13.	<i>Предмет изборног блока 2</i>	3	Изборни	2	3	0	7
14.	Стручна пракса 2	3	Обавезни	0	0	0	5
15.	<i>Предмет изборног блока 3</i>	4	Изборни	3	2	0	7
16.	<i>Предмет изборног блока 3</i>	4	Изборни	3	2	0	7
17.	Примењени истраживачки рад	4	Обавезни	0	0	0	6
18.	Завршни мастер рад	4	Обавезни	0	0	6	10
Укупно часова и ЕСПБ							120

Листа изборних предмета

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
Предмет изборног блока 1 (бира се један од два понуђена предмета)							
1.	Дистрибуирани системи	2	Изборни	2	3	0	7
2.	Заштитно кодовање	2	Изборни	2	3	0	7
Предмет изборног блока 2 (бира се један од два понуђена предмета)							
3.	ИП комуникације	3	Изборни	2	3	0	7
4.	Мобилни оперативни системи	3	Изборни	2	3	0	7
Предмет изборног блока 3 (бирају се два од четири понуђена предмета)							
5.	Пројектовање информационог система	4	Изборни	3	2	0	7
6.	Развој мултимедијалних апликација	4	Изборни	3	2	0	7
7.	Терминални мултимедијални уређаји	4	Изборни	3	2	0	7
8.	Архивирање ММ садржаја	4	Изборни	3	2	0	7

**Студијски програм: Информационе технологије и системи
(у поступку акредитације)**

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	Клијентске технологије	1	Обавезни	3	2	0	7
2.	Android програмирање	1	Обавезни	3	2	0	7
3.	Агилно ИТ Пословање	1	Обавезни	3	2	0	7
4.	ЗД моделовање	1	Обавезни	3	2	0	7
5.	Програмирање embedded система	2	Обавезни	3	2	0	7
6.	Безбедност апликација	2	Обавезни	3	2	0	7
7.	Стручни енглески језик	2	Обавезни	2	2	0	6
8.	Стручна пракса 1	2	Обавезни	0	0	6	4
	Предмет изборног блока 1	2	Изборни				8
9.	Пословна софтверска ОС решења	2	Обавезни	3	2	0	8
10.	Системи складиштења података	2	Обавезни	3	2	0	8
ДРУГА ГОДИНА							
11.	Серверске технологије	3	Обавезни	3	2	0	7
12.	Програмски алати за развој софтвера	3	Обавезни	3	2	0	7
13.	Интелигентни системи	3	Обавезни	3	2	0	7
	Предмет изборног блока 2	3	Изборни				7
14.	Програмирање база података	3	Обавезни	3	2	0	7
15.	Заштита мултимедијалних података	3	Обавезни	3	2	0	7
16.	Стручна пракса 2	3	Обавезни	0	0	6	4
	Предмети изборног блока 3	4	Изборни				14
17.	Креирање мултимедијалних садржаја	4	Обавезни	3	2	0	7
18.	Тестирање квалитета софтвера	4	Обавезни	3	2	0	7
19.	Анализа великих података – Биг дата	4	Обавезни	3	2	0	7
20.	IoT програмирање	4	Обавезни	3	2	0	7
21.	Примењени истраживачки рад	4	Обавезни	0	0	3	4
	Завршни мастер рад	4	Обавезни	0	0	10	10
Укупно часова и ЕСПБ							120

Листа изборних предмета

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
Предмет изборног блока 1 (бира се један од два понуђена предмета)							
1.	Пословна софтверска ОС решења	2	Изборни	3	3	0	8
2.	Системи складиштења података	2	Изборни	3	3	0	8
Предмет изборног блока 2 (бира се један од два понуђена предмета)							
3.	Програмирање база података	3	Изборни	3	2	0	7
4.	Заштита мултимедијалних података	3	Изборни	3	2	0	7
Предмет изборног блока 3 (бирају се један од четири понуђена предмета)							
5.	Креирање мултимедијалних садржаја	4	Изборни	3	2	0	7
6.	Тестирање квалитета софтвера	4	Изборни	3	2	0	7
7.	Анализа великих података – Биг дата	4	Изборни	3	2	0	7
8.	IoT програмирање	4	Изборни	3	2	0	7

Студијски програм: Друмски саобраћај и транспорт
(у поступку акредитације)

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	Управљање у безбедности саобраћаја	1	Обавезни	3	2	0	8
2.	Терминали и паркирање	1	Обавезни	3	2	0	7
3.	Технологија транспорта путника	1	Обавезни	3	2	0	8
4.	Предмети изборног блока 1	1	Изборни	3	2	0	7
5.	Експертизе саобраћајних незгода	2	Обавезни	3	4	0	8
6.	Управљање радом возних паркова	2	Обавезни	3	4	0	8
7.	Предмети изборног блока 2	2	Изборни	3	3	0	6
8.	Стручна пракса 1	2	Обавезни	0	0	6	4
ДРУГА ГОДИНА							
9.	Саобраћајно пројектовање	3	Обавезни	3	4	0	8
10.	Технике контроле у саобраћају	3	Обавезни	3	4	0	8
11.	Предмети изборног блока 3	3	Изборни	3	3	0	8
12.	Стручна пракса 2	3	Обавезни	0	0	6	6
13.	Предмети изборног блока 4	4	Изборни	3	2	0	8
14.	Примењени истраживачки рад	4	Обавезни	0	0	15	10
15.	Мастер рад	4	Обавезни	0	0	16	12
Укупно часова и ЕСПБ							120

Листа изборних предмета

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
Предмет изборног блока 1 (бира се један од два понуђена предмета)							
1.	Пословни енглески језик	1	Изборни	3	2	0	7
2.	Категоризација и обрада података у саобраћају	1	Изборни	3	2	0	7
Предмет изборног блока 2 (бира се један од два понуђена предмета)							
3.	Динамика возила	2	Изборни	3	3	0	8
4.	Паметни градови	2	Изборни	3	3	0	8
Предмет изборног блока 3 (бирају се један од два понуђена предмета)							
5.	Транспортне мреже	3	Изборни	3	3	0	8
6.	Технологија рада ЦОВ	3	Изборни	3	3	0	8
Предмет изборног блока 4 (бирају се један од два понуђена предмета)							
7.	Управљање процесима транспорта робе	4	Изборни	2	3	0	8
8.	Системи квалитета у друмском транспорту	4	Изборни	2	3	0	8

**Студијски програм: Производно-информационе технологије
(у поступку акредитације)**

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	Савремени инжењерски материјали	1	Обавезни	3	2	0	8
2.	Пројектовање технолошких процеса	1	Обавезни	3	3	0	8
3.	ЗД моделирање производа	1	Обавезни	2	2	0	7
4.	Предмет изборног блока 1	1	Изборни	3	2	0	7
5.	Информационе технологије у производњи	2	Обавезни	3	4	0	8
6.	Рачунаром подржана производња	2	Обавезни	3	4	0	8
7.	Предмет изборног блока 2	2	Изборни	3	3	0	8
8.	Стручна пракса 1	2	Обавезни	0	0	6	6
ДРУГА ГОДИНА							
9.	Савремени обрадни системи	3	Обавезни	3	3	0	8
10.	Управљање одржавањем хидрауличких и пнеуматских система	3	Обавезни	3	4	0	8
11.	Предмет изборног блока 3	3	Изборни	3	4	0	8
12.	Стручна пракса 2	3	Обавезни	0	0	6	6
13.	Предмет изборног блока 4	4	Изборни	3	2	0	8
14.	Примењени истраживачки рад (ПИР)	4	Обавезни	0	0	17	10
15.	Завршни мастер рад	4	Обавезни	0	0	16	12
Укупно часова и ЕСПБ							120

Листа изборних предмета

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
Предмет изборног блока 1 (бира се један од два понуђена предмета)							
1.	Пословни енглески језик	1	Изборни	3	2	0	7
2.	Дигиталне стратегије у пословању	1	Изборни	3	2	0	7
Предмет изборног блока 2 (бира се један од два понуђена предмета)							
3.	Транспортни системи у производњи	2	Изборни	3	3	0	8
4.	Пројектовање машина са аспекта безбедности	2	Изборни	3	3	0	8
Предмет изборног блока 3 (бира се један од два понуђена предмета)							
5.	Савремене технике спајања делова	4	Изборни	3	4	0	8
6.	Адитивне технологије	4	Изборни	3	4	0	8
Предмет изборног блока 4 (бира се један од два понуђена предмета)							
7.	Интегрисани системи управљања	4	Изборни	3	2	0	8
8.	Управљање квалитетом производње	4	Изборни	3	2	0	8

**Студијски програм: Грђевинске конструкције и управљање изградњом
(у поступку акредитације)**

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	Конструктивни системи	1	Обавезни	3	3	0	8
2.	Фундирање грађевинских објеката	1	Обавезни	3	3	0	8
3.	Грађевинско урбанистичке процедуре	1	Обавезни	2	2	0	7
4.	Предмет изборног блока 1	1	Изборни	2	2	0	7
5.	Металне конструкције у зградарству	2	Обавезни	3	3	0	7
6.	Методологија примењених истраживања	2	Обавезни	2	2	0	5
7.	БИМ моделовање	2	Обавезни	3	3	0	7
8.	Предмет изборног блока 1	2	Обавезни	2	2	0	7
9.	Стручна пракса 1	2	Обавезни				4
ДРУГА ГОДИНА							
10.	Бетонске и зидане конструкције	3	Обавезни	4	4	0	8
11.	Контрола квалитета у грађевинарству	3	Обавезни	3	3	0	8
12.	Предмет изборног блока 3	3	Изборни	3	3	0	8
13.	Стручна пракса 2	3	Обавезни				4
14.	Одрживи развој насеља	4	Обавезни	3	3	0	7
15.	Предмет изборног блока 4	4	Изборни	3	2	0	7
16.	Примењени истраживачки рад	4	Обавезни				4
17.	Завршни мастер рад	4	Обавезни				14
Укупно часова и ЕСПБ							120

Листа изборних предмета

Р. бр.	Назив предмета	Се м.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
Предмет изборног блока 1							
1.	Стручни енглески језик	1	Изборни	2	2	0	7
2.	Дигиталне стратегије у пословању	1	Изборни	2	2	0	7
Предмет изборног блока 2							
3.	Грађење и одржавање објеката нискоградње	2	Изборни	2	2	0	7
4.	Грађење и одржавање објеката високоградње	2	Изборни	2	2	0	7
Предмет изборног блока 3							
5.	Табеларни прорачун и оптимизациони проблеми	3	Изборни	3	3	0	8
6.	Управљање пројектима	3	Изборни	3	3	0	8
Предмет изборног блока 4							
7.	Паметни градови	4	Изборни	2	2	0	7
8.	Управљање грађевинским отпадом	4	Изборни	2	2	0	7

Примери задатака према програму пријемног испита из математике

Рационални алгебарски изрази

Приликом сређивања алгебарских израза најчешће се користе формуле за растављање полинома на чиниоце:

$$\begin{aligned}
 ax \pm bx &= x(a \pm b) \text{ (издвајање заједничког чиниоца)} \\
 ax + ay + bx + by &= a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y) \\
 &\text{(груписање чланова)} \\
 x^2 \pm 2xy + y^2 &= (x \pm y)^2 \text{ (квадрат збира / разлике)} \\
 x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y) \text{ (разлика квадрата)} \\
 x^3 \pm y^3 &= (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) \text{ (збир / разлика кубова)} \\
 x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 &= (x \pm y)^3 \text{ (куб збира / разлике)}
 \end{aligned}$$

1. Упростити израз: $\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) \frac{ab}{a-b}$.

Решење:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) \frac{ab}{a-b} &= \frac{b^3 - a^3}{a^3b^3} \left(-\frac{ab}{b-a}\right) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{(ab)^3} \left(-\frac{ab}{b-a}\right) = \\
 &= -\frac{b^2 + ab + a^2}{(ab)^2}, (a, b \neq 0, a \neq b).
 \end{aligned}$$

2. Скратити разломак: $\frac{x^2 + xy + x + y}{x^2 + 2xy + y^2}$.

Решење:

$$\frac{x^2 + xy + x + y}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{x(x+y) + (x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)(x+1)}{(x+y)^2} = \frac{x+1}{x+y}, (x+y \neq 0).$$

3. Ако је $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}$, израчунати $f(\sqrt{2} + 1)$.

Решење:

$$\begin{aligned}
 \text{Како је } f(x) &= \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1 - 1}{x^2 + 2x + 1 - 1 - 1} = \frac{(x-1)^2 - 2}{(x+1)^2 - 2}, \text{ то је } f(\sqrt{2} + 1) = \\
 &= \frac{(\sqrt{2}+1-1)^2 - 2}{(\sqrt{2}+1+1)^2 - 2} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2}{(\sqrt{2}+2)^2 - 2} = \frac{2-2}{2+4\sqrt{2}+4-2} = 0.
 \end{aligned}$$

4. Израчунати вредност израза $((a + a^{-1}) - (b + b^{-1}))^{\frac{1}{2}}$ за $a = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ и $b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Решење:

Како је

$$\begin{aligned}
 a + a^{-1} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} = \\
 &= \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 14
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 b + b^{-1} &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \\
 &= \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2 + 3 + 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 10
 \end{aligned}$$

то је $((a + a^{-1}) - (b + b^{-1}))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14 - 10} = \sqrt{4} = 2$.

5. Показати да вредност израза A не зависи од a и b :

$$A = \left(\frac{\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} \right) : \frac{\frac{a+b-(a-3b)}{a+b}}{\frac{3a+b-3(a-b)}{a-b}}$$

Решење:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} \right) : \frac{\frac{a+b-(a-3b)}{a+b}}{\frac{3a+b-3(a-b)}{a-b}} = \\
 &= \left(\frac{a^2 + b^2}{(a-b)(a+b)} + \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a-b} \right) : \frac{\frac{4b}{a+b}}{\frac{4b}{a-b}} = \frac{a^2 + b^2 + a(a-b) - a(a+b)}{(a-b)(a+b)} : \frac{a-b}{a+b} = \\
 &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} = 1;
 \end{aligned}$$

$$(a \neq 0, b \neq 0, a - b \neq 0, a + b \neq 0).$$

Линеарне једначине и неједначине

Једначина облика $ax + b = 0$, $a, b \in R$, назива се *линеарна једначина са једном непознатом*. Уколико важи да је:

1. $a \neq 0$, једначина има јединствено решење $x = -\frac{b}{a}$;
2. $a = 0, b = 0$, једначина је неодређена и има бесконачно много решења;
3. $a = 0, b \neq 0$, једначина је немогућа и нема решења.

6. Решити једначину: $\frac{2a-x}{1-2a} - \frac{2a+x}{2a+1} = \frac{2ax}{4a^2-1}$.

Решење:

За $a \neq \pm \frac{1}{2}$ дата једначина је еквивалентна једначини:

$$(x-2a)(2a+1) - (2a+x)(2a-1) - 2ax = 0,$$

па се после сређивања добија једначина $(1-a)x = 4a^2$, која за $a \neq 1$ има јединствено решење $x = \frac{4a^2}{1-a}$. За $a = 1$ једначина је немогућа.

Квадратне једначине и неједначине. Квадратна функција

Једначина облика $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in R, a \neq 0$, назива се *квадратна једначина*. Решења квадратне једначине дата су формулом:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Израз под кореном $D = b^2 - 4ac$, назива се *дискриминанта квадратне једначине* и од ње зависи природа решења квадратне једначине:

1. $D > 0$, решења су реална и различита;
2. $D = 0$, решења су реална и једнака;
3. $D < 0$, решења су конјуговано комплексни бројеви.

Ако су x_1, x_2 решења квадратне једначине, важи следеће:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \text{ (Виетове формуле);}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

7. Одредити m тако да решења једначине $3x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ задовољавају услов $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = 64$.

Решење:

Према Виетовој формули је $x_1 + x_2 = \frac{2m}{3}$ и како је $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$ и $64 = 4^3$, то је $x_1 + x_2 = 4$ тј. $\frac{2m}{3} = 4$, одакле је $m = 6$.

8. Одредити параметар a тако да један од корена једначине $x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$ буде квадрат другог корена.

Решење:

Према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = \frac{15}{4}$ и $x_1 \cdot x_2 = a$ и како је један корен квадрат другог тј. $x_1 = x_2^2$ то је $x_2^2 + x_2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow 4x_2^2 + 4x_2 - 15 = 0$.

Одавде је $x'_2 = \frac{3}{2}$ и $x''_2 = -\frac{5}{2}$ и како је $a = x_2^3$ то постоје две вредности параметра a које задовољавају постављени услов: $a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ и $a_2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$.

9. Не решавајући квадратну једначину $x^2 - x + m = 0$, одредити параметар $m \in R$, тако да њена решења задовољавају услов $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

Решење:

Користећи Виетове формуле добијамо да је $x_1 + x_2 = 1$ а $x_1 \cdot x_2 = m$. Како је

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2) = \\ &= 1 \cdot (1^2 - 3m) = \\ &= 1 - 3m \end{aligned}$$

$$\text{и } x_1^3 + x_2^3 = 7, \text{ па је } 1 - 3m = 7, \text{ а } m = -2.$$

10. Решити неједначину $\frac{4x-2}{-x^2+3x+4} > 1$.

Решење:

Дата неједначина може се представити у облику $\frac{4x-2}{-x^2+3x+4} - 1 > 0$ тј. $\frac{x^2+x-6}{-x^2+3x+4} > 0$ односно $\frac{(x-2) \cdot (x+3)}{(x+1) \cdot (x-4)} < 0$. Решења последње неједначине су $x \in (-3, -1) \cup (2, 4)$. Шематски приказ решења дат је у табели.

x	-3	-1	2	4
$(x-2) \cdot (x+3)$	+	-	-	+
$(x+1) \cdot (x-4)$	+	+	-	+
$\frac{(x-2) \cdot (x+3)}{(x+1) \cdot (x-4)}$	+	-	+	+

11. Решити једначину

$$\sqrt{x+10} - \frac{6}{\sqrt{x+10}} = 5.$$

Решење:

Сменом $\sqrt{x+10} = t$ једначина постаје $t - \frac{6}{t} = 5$, односно, $t^2 - 5t - 6 = 0$.

Корени ове једначине су $t_1 = 6$ и $t_2 = -1$. Међутим, $t_2 = -1$ није решење, јер t не може бити негативно. За $t = 6$ добијамо $x + 10 = 36$ тј. $x = 26$.

12. Решити једначину: $2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + 10 = 0$.

Решење: Увођењем смене $t = \frac{x^2+1}{x}$, једначина има облик: $2t^2 - 9t + 10 = 0$, а њена решења су $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = 2$. Тада је:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x} &= \frac{5}{2} \vee \frac{x^2+1}{x} = 2, \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 &= 0 \vee x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_1 &= 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = 1. \end{aligned}$$

Степеновање. Кореновање. Логаритмовање

Основна својства *степенa* реалних бројева дата су следећим формулама:

$$\begin{aligned} a^1 &= a, a^{n+1} = a^n a, (a \in R, n \in N); \\ a^0 &= 1, (a \neq 0); \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, (a \neq 0, n \in N); \\ a^m a^n &= a^{m+n}, \\ a^m \cdot a^n &= a^{m \cdot n}, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^n &= a^n b^n, \\ (a:b)^n &= a^n : b^n, (a, b \in R \setminus \{0\}, m, n \in Z). \end{aligned}$$

Основна својства *корена* реалних бројева са природним изложницима су:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n} &= \begin{cases} a, n - \text{neparan} \\ |a|, n - \text{paran} \end{cases}, (a \in R, n \in N), \\ \sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}, \\ \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}, \\ \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a:b}, (b \neq 0), \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a}, \\ \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[np]{a^{mp}}, (a \geq 0, b \geq 0, m, n, p \in N). \end{aligned}$$

Логаритам броја b , ($b > 0$), за основу a , ($a > 0 \wedge a \neq 1$), дефинише се на следећи начин:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Ако је $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, s \in R, r \in R \setminus \{0\}$, тада важи:

$$\begin{aligned} a^{\log_a b} &= b, \\ \log_a a &= 1, \\ \log_a 1 &= 0, \\ \log_a b &= \frac{1}{\log_b a}, \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}, \\ \log_a b^s &= s \log_a b, \\ \log_{a^r} b &= \frac{1}{r} \log_a b, \\ \log_a b c &= \log_a b + \log_a c, \\ \log_a \frac{b}{c} &= \log_a b - \log_a c. \end{aligned}$$

13. Решити једначину: $9^x + 3^{x+1} + 2 = 0$.

Решење:

Дату једначину можемо записати као $(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x + 2 = 0$. После увођења смене $3^x = t$ добијамо $t^2 + 3t + 2 = 0$, одакле је $t_1 = -1$ и $t_2 = -2$. Како је $3^x > 0$ то једначина нема решења.

14. Решити једначину: $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 4$.

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини:

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x = 4, \text{ тј. } (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + \frac{1}{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x} = 4.$$

Увођењем смене $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = t$ добијамо $t + \frac{1}{t} = 4$ тј. $t^2 - 4t + 1 = 0$. Одавде добијамо $t_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $t_2 = 2 + \sqrt{3}$ тј.

$$(2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2 - \sqrt{3}) \text{ и } (2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2 + \sqrt{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^{-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} = 1 & \quad \vee \quad \frac{x}{2} = -1, \\ x = 2 & \quad \vee \quad x = -2. \end{aligned}$$

15. Израчунати вредност израза: $2 \log_5 125 \cdot 2^{1+\log_2 4} - 3^{2 \log_3 9-1}$.

Решење:

$$2 \log_5 125 \cdot 2^{1+\log_2 4} - 3^{2 \log_3 9-1} = 2 \log_5 5^3 \cdot 2^{1+\log_2 2^2} - 3^{2 \log_3 3^2-1} = 2 \cdot 3 \cdot 8 - 27 = 21.$$

16. Решити једначину: $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$.

Решење:

Нека је $x - 5 > 0$ и $2x - 3 > 0$, тј. $x > 5$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\log \sqrt{(x-5) \cdot (2x-3)} = \log 3$, тј. $(x-5) \cdot (2x-3) = 9$, односно, једначини $2x^2 - 13x + 6 = 0$ чија су решења $x_1 = 6$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, од којих је само прво решење полазне једначине.

17. Решити једначину: $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

Решење:

Нека је $x > 0$ и $x \neq 1$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\log_x 2 - \frac{1}{2 \log_x 2} + \frac{7}{6} = 0$. Уведимо смену $\log_x 2 = t$. Тада је $t - \frac{1}{2t} + \frac{7}{6} = 0$, тј. $6t^2 + 7t - 3 = 0$, одакле је $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{3}{2}$, $x_1 = 2^3 = 8$, $x_2 = 2^{-\frac{2}{3}}$.

Аритметички и геометријски низови

Низ бројева у коме је разлика свака два суседна члана низа једнака, назива се *аритметички низ* (аритметичка прогресија).

a_1 – први члан низа;

a_n – n -ти (општи) члан низа, $n \in \mathbb{N}$;

d – разлика аритметичког низа;

S_n – збир првих n чланова.

За аритметички низ важе следеће формуле:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

Низ бројева у коме је количник свака два суседна члана низа једнак, назива се *геометријски низ* (геометријска прогресија).

$$a_1 \text{ — први члан низа;}$$

$$a_n \text{ — } n\text{-ти (општи) члан низа, } n \in N;$$

$$q \text{ — количник аритметичког низа;}$$

$$S_n \text{ — збир првих } n \text{ чланова.}$$

За геометријски низ важе следеће формуле:

$$a_n = a_1 q^{n-1};$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, |q| > 1; \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, |q| < 1.$$

18. Један угао троугла је 120° , а странице тог троугла образују аритметичку прогресију чија је разлика $d = 4$. Колике су странице тог троугла?

Решење:

Нека је $c = b + 4$, $b = b$, $a = b - 4$, $\gamma = 120^\circ$. Према косинусној теорему је $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, одакле је $(b + 4)^2 = (b - 4)^2 + b^2 - 2(b - 4) \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, па је $2b^2 - 20b = 0$, тј. $2b \cdot (b - 10) = 10$.

Дакле $b = 10$, $a = 6$ и $c = 14$.

19. Три броја чине аритметички низ. Њихов збир је 6, а збир њихових квадрата 62. Који су то бројеви?

Решење:

Нека је $a_1 = a_2 - d$, $a_2 = a_2$, $a_3 = a_2 + d$.

Како је $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ тј. $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 6 \Rightarrow 3a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 2$.

Како је $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 62$ то је $(a_2 - d)^2 + a_2^2 + (a_2 + d)^2 = 62$, $3a_2^2 + 2d^2 = 62$, $3 \cdot 4 + 2d^2 = 62$,

$d^2 = 25$, $d = \pm 5$, па су тражене вредности бројева $-3, 2, 7$.

20. Бројеви: $2x - 3$, $3x + 4$, $5x + 1$ су прва три узастопна члана аритметичког низа. Одредити x и наћи суму првих x чланова.

Решење:

$$a_1 = 2x - 3, a_2 = 3x + 4, a_3 = 5x + 1.$$

Како је: $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, то је $(3x + 4) - (2x - 3) = (5x + 1) - (3x + 4)$, $x + 7 = 2x - 3$, $x = 10$, па је $a_1 = 17, a_2 = 34, a_3 = 51, d = 17$. Отуда је $S_x = S_{10} = \frac{10}{2} \cdot [2a_1 + (10 - 1)d] = 5 \cdot [2 \cdot 17 + 9 \cdot 17] = 935$.

21. Четврти члан аритметичког низа је 9, а девети члан је -6. Колико чланова овог низа треба сабрати да се добије 54?

Решење:

Како је:

$$a_4 = a_1 + 3d = 9$$

$$a_9 = a_1 + 8d = -6,$$

решавањем система добије се да је $d = -3$, $a_1 = 18$.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n - 1)) \text{ па је } \frac{n}{2}(36 - 3(n - 1)) = 54, \Leftrightarrow -n^2 + 13n - 36 = 0.$$

Решења ове квадратне једначине су $n_1 = 4$ и $n_2 = 9$. Дакле, треба сабрати 4 или 9 чланова низа.

22. Збир три броја која образују растућу геометријску прогресију је 126. Ако је средњи члан 24, одредити најмањи члан.

Решење:

Како је $a_2 = 24$ и $a_1 + a_2 + a_3 = 126$, то је $\frac{24}{q} + 24 + 24q = 126$, $4q^2 - 17q + 4 = 0$, одакле је $q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$. Међутим, прогресија је растућа па решење $q = \frac{1}{4}$ не долази у обзир. Дакле, $a_1 = \frac{24}{4} = 6$.

23. Три броја чине аритметички низ, а њихов збир је 12. Ако се последњи број повећа за вредност првог, добија се геометријски низ. Који су то низови?

Решење:

Означимо чланове аритметичког низа са a_1 , $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Тада је

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12 \Leftrightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Leftrightarrow a_1 + d = 4. \quad (1)$$

Геометријски низ би био према условима задатка $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + d, b_3 = a_3 + a_1 = a_1 + 2d + a_1 = 2a_1 + 2d$. Како је $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, то је

$$\begin{aligned} (a_1 + d)^2 &= a_1 \cdot (2a_1 + 2d) \\ (a_1 + d)^2 &= 2a_1 \cdot (a_1 + d) \\ a_1 &= d. \end{aligned} \tag{2}$$

Једначине (1) и (2) дају решење $d=2, a_1=2$ па је аритметички низ 2, 4, 6, а геометријски 2, 4, 8.

Тригонометрија

Ако је α оштар угао, a и b катете, (наспрам угла α је катета a), а c хипотенуза правоуглог троугла, тада се тригонометријске функције дефинишу на следећи начин:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

За тригонометријске функције важе основни тригонометријски идентитети:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha &= 1, \\ \sin \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \end{aligned}$$

Тригонометријске функције збира и разлике два угла једнаке су:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}. \end{aligned}$$

Тригонометријске функције двоструког угла једнаке су:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}. \end{aligned}$$

Тригонометријске функције полууглова једнаке су:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

Трансформација збира и разлике у производ:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \pm \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Трансформација производа у збир или разлику:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)). \end{aligned}$$

24. Ако је $tg^2\alpha + ctg^2\alpha = 2$, израчунати $tga + ctga$.

Решење:

Како је $(tga + ctga)^2 = tg^2\alpha + 2tgactga + ctg^2\alpha$ и $tga \cdot ctga = 1$, то је $(tga + ctga)^2 = 4$, одакле је $tga + ctga = \pm 2$.

25. Упростити израз: $\frac{1 + \sin 2a - \cos 2a}{1 + \sin 2a + \cos 2a}$.

Решење:

Коришћењем формула добија се:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 2a - \cos 2a}{1 + \sin 2a + \cos 2a} &= \frac{\cos^2 a + \sin^2 a + \sin 2a - (\cos^2 a - \sin^2 a)}{\cos^2 a + \sin^2 a + \sin 2a + \cos^2 a - \sin^2 a} = \\ &= \frac{2\sin^2 a + 2\sin a \cos a}{2\cos^2 a + 2\sin a \cos a} = \frac{2\sin a(\sin a + \cos a)}{2\cos a(\sin a + \cos a)} = \operatorname{tg} a \end{aligned}$$

26. Ако је $tga = 3$, израчунати $\frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}$.

Решење:

Дати израз $\frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}$ се дељењем сваког члана са $\cos 2\alpha$ трансформише у израз $\frac{2tg2\alpha - 3}{4tg2\alpha + 5}$. Како је $tga = 3$ то је $tg2\alpha = \frac{2tga}{1-tg^2\alpha} = -\frac{3}{4}$, па је тражена вредност израза једнака $-\frac{9}{4}$.

27. Решити једначину: $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$.

Решење:

Дата једначина је еквивалентна једначини:

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$

па је $\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow tg^2 x = 1$, одакле је $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

Геометрија у равни

Троугао

За произвољан троугао чије странице имају дужине a, b, c , одговарајуће висине h_a, h_b, h_c , унутрашњи углови су α, β, γ а спољашњи углови $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, важе следеће формуле:

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \text{ - (површина троугла)}$$

$$O = 2s = a + b + c \text{ - (обим троугла)}$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ - (Херонов образац)}$$

$$r = \frac{P}{s} \text{ - (полупречник уписаног круга у троугао)}$$

$$R = \frac{abc}{4P} \text{ - (полупречник описаног круга око троугла)}$$

$$a : b = \sin \beta : \sin \alpha \text{ - (однос страница и висина у троуглу)}$$

$$\alpha + \beta + \chi = 180^\circ \text{ - (збир унутрашњих углова троугла)}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \chi_1 = 360^\circ \text{ - (збир спољашњих углова троугла)}$$

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta + \chi \text{ - (однос унутр. и спољ. углова)}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \chi} = 2R \text{ - (Синусна теорема)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ - (Косинусна теорема)}$$

За правоугли троугао са хипотенузом c важе формуле:

$$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c \text{ - (површина правоуглог троугла)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ - (Питагорина теорема)}$$

$$r = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} \text{ - (полупречник уписаног круга)}$$

$$R = \frac{c}{2} = t_c \text{ - (полупречник описаног круга)}$$

Ако је троугао једнакостраничан:

$$\alpha = \beta = \chi = 60^\circ \Leftrightarrow a = b = c$$

$$O = 3a \text{ - (обим једнакостраничног троугла)}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ - (површина једнакостраничног троугла)}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ - (висина једнакостраничног троугла)}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ - (полупречник уписаног круга)}$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ - (полупречник описаног круга)}$$

Четвороугао

За четвороуглове важе следеће формуле:

$$P = ab, O = 2(a + b) \text{ - (површина и обим правоугаоника)}$$

$$P = a^2 = \frac{d^2}{2}, O = 4a \text{ - (површина и обим квадрата)}$$

$$d = a\sqrt{2} \text{ - (дијагонала квадрата)}$$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, r = \frac{a}{2} \text{ - (полупреч. опис. и упис. круга у квадрат)}$$

$$P = ah = \frac{d_1 d_2}{2} \text{ - (површина ромба)}$$

$$r = \frac{h}{2} \text{ - (полупречник уписаног круга ромба)}$$

$$P = \frac{a+b}{2} h = mh \text{ - (површина трапеза)}$$

$$m = \frac{a+b}{2} \text{ - (средња линија трапеза)}$$

$$P = ah_a = bh_b \text{ - (површина паралелограма)}$$

Правилан шестоугао

Правилан шестоугао могуће је поделити на шест једнакостраничних троуглова. За њега важе следеће формуле:

$$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}, O = 6a \text{ - (површина и обим правилног шестоугла)}$$

$$R = a \text{ - (полупречник описаног круга)}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ - (полупречник уписаног круга)}$$

$$d_1 = 2a \text{ - (дужа дијагонала правилног шестоугла)}$$

$$d_2 = 2h = a\sqrt{3} \text{ - (краћа дијагонала правилног шестоугла)}$$

Правилан многоугао

Ако је n број страница правилног многоугла ($n \geq 3$), правилан многоугао је могуће поделити на n подударних троуглова и важе следеће формуле:

$$P = nP_{\Delta}, O = na \text{ - (површина и обим правилног многоугла)}$$

$$S_n = (n - 2)180^\circ \text{ - (збир унутрашњих углова)}$$

$$\alpha = \frac{S_n}{n} \text{ - (унутрашњи угао)}$$

$$d_n = n - 3 \text{ - (број дијагонала из једног темена)}$$

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2} \text{ - (укупан број дијагонала)}$$

Круг

За круг полупречника r , са централним углом α , периферијским углом β , важи следеће:

$$P = r^2\pi, O = 2r\pi \text{ - (површина и обим круга)}$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} \text{ - (дужина лука)}$$

$$P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{rl}{2} \text{ - (површина исечка)}$$

$$\alpha = 2\beta \text{ - (однос централног и периферијског угла)}$$

$$P_{kp} = \pi(r_1^2 - r_2^2) \text{ - (површина кружног прстена)}$$

28. Ако се број страница правилног многоугла повећа за 3, његов унутрашњи угао ће се повећати 27° . Одредити број страница многоугла.

Решење:

Означимо са n број страница правилног многоугла, а са S_n збир његових унутрашњих углова. Тада је $n \cdot \alpha = S_n$ и како је:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ,$$

то је:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}.$$

Према условима задатка $\frac{S_{n+3}}{n+3} = \alpha + 27$, одакле је:

$$\frac{(n+1) \cdot 180}{n+3} = \frac{(n-2) \cdot 180}{n} + 27, \text{ тј.}$$

$$27n^2 + 81n - 1080 = 0,$$

одакле је $n^2 + 3n - 40 = 0$.

Како је $n > 0$, то је једино решење $n = 5$.

29. Збир катета правоуглог троугла је 32. Ако се већа катета умањи за 5 cm, а мања повећа за 4 cm, површина се не мења. Одредити странице троугла.

Решење:

Нека су a и b катете правоуглог троугла. Из услова задатка добијамо систем једначина:

$$a + b = 32$$

$$\frac{1}{2}(a + 4) \cdot (b - 5) = \frac{1}{2}ab,$$

који је еквивалентан са системом:

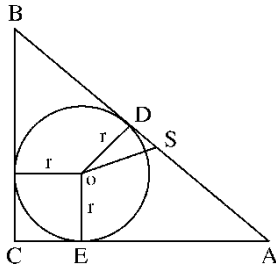
$$\begin{aligned} a + b &= 32 \\ 4b - 5a &= 20 \quad (b > a), \end{aligned}$$

одакле добијамо:

$$a = 12 \text{ cm}, b = 20 \text{ cm} \text{ и } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 20^2} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34} \text{ cm}.$$

30. Катете правоуглог троугла су 3 cm и 4 cm. Наћи растојање између центра уписаног и центра описаног круга.

Решење:



Како је $a = 3 \text{ cm}$ и $b = 4 \text{ cm}$, то је $c = 5 \text{ cm}$. $R = \frac{1}{2}c = 2,5 \text{ cm}$ и $r = s - c$, где је $S = \frac{a+b+c}{2} = 6$, па је $r = 1 \text{ cm}$. У правоуглом троуглу DOS је $x = DS = AD - AS = AD - \frac{c}{2} = AE - \frac{c}{2} = b - r - \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$, па је $OS^2 = OD^2 + DS^2 = r^2 + x^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ а $OS = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$.

31. Страна ромба је $a = 9 \text{ cm}$, а збир дијагонала $d_1 + d_2 = 24 \text{ cm}$. Одредити површину ромба.

Решење:

Како је:

$$a^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 4 \cdot 81 = 324.$$

Из једнакости:

$$(d_1 + d_2)^2 = 24^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 \cdot d_2 = 576,$$

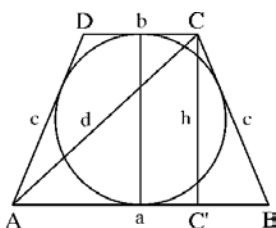
добија се:

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{576 - 324}{2} = 126.$$

Како је површина ромба $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, то је $P = \frac{126}{2} = 63 \text{ cm}^2$.

32. Око круга полупречника $r = 1,5 \text{ cm}$ описан је једнакокраки траpez површине $P = 15 \text{ cm}^2$. Израчунати дужину дијагонале овог трапеza.

Решење:



Нека су a и b основице трапеza и h висина трапеza. Приметимо да је $2r = h$, $h = 3$. Како је $P = \frac{a+b}{2}h \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{P}{h} = \frac{15}{3} = 5$. Из правоуглог троугла $AC'C$ добијамо: $d^2 = x^2 + h^2$, $x = |AC'| = a - \left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$, па је $d^2 = 5^2 + 3^2$, $d^2 = 34 \Rightarrow d = \sqrt{34} \text{ cm}$.

Геометрија у простору

За израчунавање површина и запремина рогљастих и обртних тела са базом (површином основе) B , висином H , омотачем M , полупречником основе обртних тела r и изводницом обртних тела s , неопходне су следеће формуле:

$$\begin{aligned}
 P &= 2B + M, V = BH \text{ - (површина и запремина призме)} \\
 P &= B + M, V = \frac{1}{3}BH \text{ - (површина и запремина пирамиде)} \\
 P &= B_1 + B_2 + M \text{ - (површина зарубљене пирамиде)} \\
 V &= \frac{1}{3}H(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2) \text{ - (запремина зарубљене пирамиде)} \\
 P &= 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi H \text{ - (површина ваљка)} \\
 V &= BH = r^2\pi H \text{ - (запремина ваљка)} \\
 P &= B + M = r^2\pi + r\pi s \text{ - (површина купе)} \\
 V &= \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H \text{ - (запремина купе)} \\
 P &= B_1 + B_2 + M = r_1^2\pi + r_2^2\pi + (r_1 + r_2)\pi s \text{ - (повр. зарубљене купе)} \\
 V &= \frac{1}{3}H(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2) = \frac{H\pi}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) \text{ - (запр. заруб. купе)} \\
 P &= 4r^2\pi, V = \frac{4}{3}r^3\pi \text{ - (површина и запремина лопте)}
 \end{aligned}$$

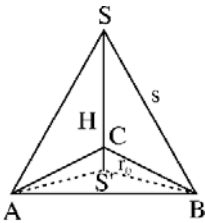
33. Димензије правоуглог паралелопипеда односе се као 2:3:6, а његова дијагонала је 35 cm. Израчунати запремину паралелопипеда.

Решење:

Из $a:b:c = 2:3:6 \Rightarrow a = 2k, b = 3k$ и $c = 6k$. Како је $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $D^2 = (2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2$, $D^2 = 49k^2$, $D = 7k$, $35 = 7k \Rightarrow k = 5$. Одатле је $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 30$ cm, па је $V = a \cdot b \cdot c$, $V = 10 \cdot 15 \cdot 30$, $V = 4500$ cm³.

34. Одредити запремину правилне троугране пирамиде чија је основна ивица $a = 3\sqrt{3}$ cm, а бочна ивица $s = 5$ cm.

Решење:



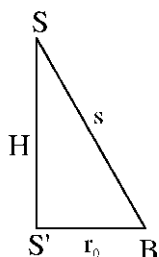
$$\text{Како је } r_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 3 \text{ cm и}$$

$$H^2 = s^2 - r_0^2,$$

$$H^2 = 5^2 - 3^2,$$

$$H^2 = 16,$$

$$H = 4 \text{ cm,}$$



па је:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4,$$

$$V = 9\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

35. У тространу призму чије су основне ивице $a = 13$ cm, $b = 14$ cm и $c = 15$ cm уписан је и око ње описан ваљак. Наћи однос запремина та два ваљка.

Решење:

Означимо са r_u полупречник основе уписаног ваљка, са r_o полупречник основе описаног ваљка и површину основе призме са P . Према Хероновом обрасцу:

$$P = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)},$$

где је $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ cm, добија се $P = 84$ cm².

Како је:

$$P = r_u \cdot s \Rightarrow r_u = \frac{84}{21} = 4 \text{ cm}$$

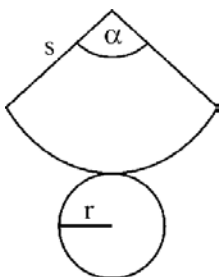
и

$$P = \frac{abc}{4r_o} \Rightarrow r_o = \frac{abc}{4P} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8},$$

Добија се:

$$\frac{V_u}{V_o} = \frac{r_u^2 \pi \cdot H}{r_o^2 \pi \cdot H} = \frac{r_u^2}{r_o^2} = \frac{4^2}{\left(\frac{65}{8}\right)^2} = \frac{32^2}{65^2}.$$

36. Када се омотач купе развије у равни добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Израчунати запремину купе.

Решење:

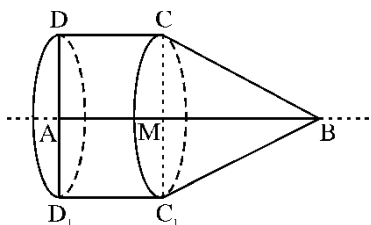
Нека је s ивица купе, r полупречник основе и H висина купе. Тада из формуле $l = \frac{s\pi\alpha}{180}$ за дужину лука полупречника s и централног угла α и формуле $l = 2r\pi$ за обим основе кружне купе добија се $\frac{4\sqrt{5} \cdot \pi \cdot 90}{180} = 2r\pi$, одакле је $r = \sqrt{5}$.

Како је $H^2 = s^2 - r^2$, то је $H = 5\sqrt{3}$.

Отуда је: $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H$, $V = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot \pi \cdot 5\sqrt{3}$, $V = \frac{25\pi}{\sqrt{3}}$.

37. Правоугли траpez основица $a = 10$ cm и $b = 2$ cm и $P = 90$ cm² ротира око веће основе. Израчунати површину и запремину насталог тела.

Решење:



Како је површина трапеца $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, то је $\frac{10+2}{2} \cdot h = 90$, и $h = 15$ cm, односно $|AD| = 15$ cm. Површина насталог тела је збир површине оснине ваљка и омотача ваљка и купе, па је:

$$P = r^2\pi + 2r\pi \cdot H_1 + r\pi s = |AD|^2\pi + 2|AD| \cdot |AM| \cdot \pi + |AD| \cdot |BC| \cdot \pi.$$

Како је $|AM| = |DC|$, то је $|AM| = b = 2$ cm.

Такође је $s = |BC|$ и

$$\begin{aligned} s^2 &= |CM|^2 + |MB|^2 = |AD|^2 + (|AB| - |AM|)^2 = \\ &= 15^2 + (10 - 2)^2 = 225 + 64 = 289. \end{aligned}$$

Дакле, $s = 17$, па је $P = 225\pi + 60\pi + 255\pi = 540\pi$ cm².

Запремина насталог тела једнака је збиру запремина ваљка и купе, односно:

$$\begin{aligned} V &= r^2\pi \cdot H_1 + \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H_2 = r^2\pi \cdot b + \frac{1}{3}r^2\pi \cdot (a - b) = 450\pi + \frac{1}{3}1800\pi \\ &= 1050\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Аналитичка геометрија у равни

Ако појмове геометрије у равни представимо у Декартовом координатном систему, основни појам - тачку посматрамо као уређени пар њених координата $M_1(x_1, y_1)$, тада важе следеће формуле:

$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ - (растојање између две тачке)

$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ - (средиште дужи M_1M_2)

$T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ - (тежиште троугла чија су темена тачке (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

$P_{\Delta} = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ - (површина троугла чија су темена тачке (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

$y = kx + n$ - (експлицитни облик једначине праве, k - правац праве, n - одсечак на Y оси)

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - (једначина праве кроз једну тачку)

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ - (једначина праве кроз две тачке)

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ - (сегментни облик једначине праве, p - одсечак на Хоси, q - одсечак на Yоси)

$Ax + By + C = 0$ - (имплицитни облик једначине праве)

$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - (растојање тачке од праве)

$\text{tg}\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ - (угао између две праве)

$k_1 k_2 = -1$ - (услов нормалности две праве)

$k_1 = k_2$ - (услов паралелности две праве)

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ - (једначина кружнице са центром (p, q) и полупречником r)

$x^2 + y^2 = r^2$ - (једначина централне кружнице)

$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$ - (услов додира праве и кружнице)

$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2$ - (тангента у тачки круга)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - (једначина елипсе, са фокусима $F_{1,2} = (\pm e, 0)$)

$e^2 = a^2 - b^2$ - (ексцентрицитет елипсе)

$a^2 k^2 + b^2 = n^2$ - (услов додира праве и елипсе)

$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ - (тангента у тачки елипсе)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - (једначина хиперболе, са фокусима $F_{1,2} = (\pm e, 0)$)

$e^2 = a^2 + b^2$ - (ексцентрицитет хиперболе)

$a^2 k^2 - b^2 = n^2$ - (услов додира праве и хиперболе)

$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ - (тангента у тачки хиперболе)

$y^2 = 2px$ - (једначина параболе, са фокусом $F(\frac{p}{2}, 0)$)

$2kn = p$ - (услов додира праве и параболе)

$y_0 y = p(x + x_0)$ - (тангента у тачки параболе)

38. Одредити m тако да права $mx + y - 5 = 0$ додирује елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Решење:

Права $y = kx + n$ додирује елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је $a^2 k^2 + b^2 = n^2$. Како се дата права може записати у облику $y = -mx + 5$, а елипса у облику $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ то услов додира постаје $4^2 \cdot (-m)^2 + 3^2 = 5^2$, одакле је $m^2 = 1$ па је $m = \pm 1$.

39. Одредити једначину кружнице која је концентрична са кружницом $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ и садржи тачку $M(1, -4)$.

Решење:

Једначину дате кружнице можемо записати у облику:

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 5,$$

одакле видимо да је центар кружнице тачка $C(-3, -1)$. Из услова концентричности кружница, једначина тражене кружнице је:

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = R^2.$$

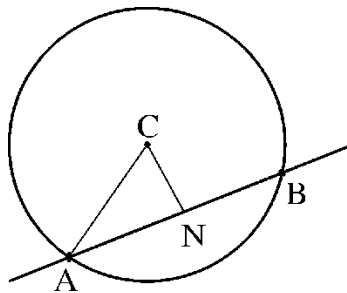
Како тражена кружница садржи M , то је $R^2 = (1 + 3)^2 + (-4 + 1)^2 = 25$, па је једначина кружнице $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

40. Написати једначину круга са центром $C(3, -1)$, који на правој $2x - 5y + 18 = 0$ одсеца тетиву дужине 6.

Решење:

Једначина круга са центром у тачки C има облик:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = r^2.$$



Тачка C , подножје нормале из C на дату праву и крајња тачка тетиве, одређују правоугли троугао ANC чија је хипотенуза полупречник круга r . Одстојање тачке C од праве је $d = \sqrt{29}$, па је $r^2 = d^2 + 3^2 = 38$ и једначина круга: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$.

Могући примери задатака за пријемни испит

ПРИМЕР 1

1. Упрошћен израз $\frac{(a+b)^2-4}{2a+2b+4}$ има облик:

а) $\frac{2a}{a+b}$; б) $\frac{a+b}{2} - 1$; в) $\frac{a+b+2}{2}$.

Решење: б)

2. Решење једначине $3^{x+2} - 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} + 24 = 0$ је:

а) $x = 2$; б) $x = -2$; в) $x = 0$.

Решење: а)

3. Ако је $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ онда је $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ једнак:

а) $\frac{1}{7}$; б) 7; в) $-\frac{1}{7}$.

Решење: в)

4. Правилни многоугао чији један унутрашњи угао износи 172° је:

а) 40-угао; б) 45-угао.

Решење: б)

5. Дијагонала правилне четворостране призме је 3, а однос ивице и висине је 2:1. Површина такве призме је:

а) 8; б) 16; в) 10.

Решење: б)

ПРИМЕР 2

1. Решење неједначине $(x+4)m^2 - (x+1)m + 1 > 0$ за свако $m \in R$ је интервал:

а) $x \in (-\infty, -4)$; б) $x \in (-4, +\infty)$; в) $x \in (-3, 5)$.

Решење: в)

2. Вредност израза $A = \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$ је:

а) 10; б) 5; в) 20.

Решење: в)

3. Решење једначине $3 + 10 + 17 + \dots + x = 345$ је:

- а) 55; б) 66; в) 77.

Решење: б)

4. У правоуглом троуглу једна катета је 8 cm а друга је 2 cm краћа од хипотенузе. Површина тог троугла је:

- а) 60 cm^2 ; б) 40 cm^2 ; в) 80 cm^2 .

Решење: а)

5. Угао под којим се из тачке $A(8,0)$ види елипса $3x^2 + y^2 = 48$ је:

- а) 45° ; б) 90° ; в) 0° .

Решење: б)

ПРИМЕР 3

1. Упрошћен израз $\frac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^3+1} \right)$ има облик:

- а) $\frac{a+x}{1+x}$; б) $\frac{a}{x^3+1}$; в) a .

Решење: в)

2. Решење неједначине $-2 < \frac{-x^2+5x-7}{x-4} \leq 1$ је:

- а) $1 \leq x < 3$; б) $-1 < x < 3$; в) $1 \leq x \leq 3$.

Решење: в)

3. Ако је $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ онда је $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ једнак:

- а) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$; б) $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$; в) $\frac{3}{4}$.

Решење: б)

4. Ако се број страница конвексног многоугла повећа за 5, онда се број дијагонала многоугла повећа за 45. Број страница које има првобитни многоугао је:

- а) 8; б) 10; в) 12.

Решење: а)

5. Вредност параметра m која обезбеђује да кружница $(x - 2m)^2 + (y - m)^2 = 25$ пролази кроз тачку $N(6,4)$ је:

- а) $m = 1$; б) $m = \frac{27}{5}$; в) $m = 1$ или $m = \frac{27}{5}$.

Решење: в)

ПРИМЕР 4

1. Решење једначине $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ је:

- а) $\sqrt{2}, 1$; б) $\pm\sqrt{2}, 1$; в) $\pm\sqrt{2}, \pm 1$.

Решење: в)

2. Вредност израза $A = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$ је:

- а) $\frac{25}{4}$; б) $\frac{25}{2}$; в) $\frac{25}{3}$.

Решење: б)

3. У аритметичком низу за који је $a_1 = 45, n = 31, S_n = 0$ важи да је:

- а) $a_n = -45, d = -3$; б) $a_n = -45, d = 3$; в) $a_n = -45, d = 0$.

Решење: а)

4. Дужине двеју страница троугла су 6 и 9. Једна од висина које одговарају тим страницама је за 5 дужа од друге. Дужине тих висина су:

- а) 10,12; б) 10, 15; в) 12, 15.

Решење: б)

5. Права четворострана призма чија је основа ромб са дијагоналама 7,2 и 5,4 има висину једнаку основној ививци призме. Површина такве призме је:

- а) 119,88; б) 120; в) 102,08.

Решење: а)

ПРИМЕР 5

1. Ако је $A = \frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$ а $B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)(a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})^{-1}$, онда је $A - B^{-1}$ једнако:

- а) $\frac{a+b}{ab}$; б) 1; в) 0.

Решење: в)

2. Решење једначине $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ је:

- а) 0 или 1; б) $-\frac{1}{2}$ или 0; в) 0 или $\frac{1}{2}$.

Решење: в)

3. Ако је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ тада је $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$ једнако:

- а) -2; б) 2; в) 0.

Решење: б)

4. Површина ромба чије се дијагонала разликују за 8 не мења се ако се краћа дијагонала продужи за 3, а дужа скрати за 4. Дужине тих дијагонала су:

- а) 12,20; б) 20, 28; в) 6, 14.

Решење: а)

5. Једначина кружнице која је концентрична са кружницом $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ и пролази кроз тачку $N(1, -4)$ је:

- а) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$; б) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$;
в) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Решење: а)

ПРИМЕР 6

1. Вредност параметра p тако да једно решење једначине $4x^2 - 15x + \frac{p^3}{2} = 0$ буде квадрат другог решења је:

- а) -5 или 2; б) 3 или -5; в) -3 или 2.

Решење: б)

2. Вредност израза $A = 10^{1-\log 5} + 10^{2-\log 20} - 10^{3-\log 500}$ је:

- а) 5; б) 10; в) 15.

Решење: а)

3. Први члан геометријског низа је $a_1 = 1$. Збир трећег и петог члана је 90. Такав низ има количник једнак:

- а) $q = \pm 9$; б) $q = \pm 3$; в) $q = \pm \frac{1}{3}$.

Решење: б)

4. Ако је збир унутрашњих углова многоугла 720° , онда је број дијагонала тог многоугла једнак:

- а) 6; б) 3; в) 9.

Решење: в)

5. Површина призме, чија је висина 10, основа једнакокраки трапез основица 16 и 10 и са растојањем између основица 4, једнака је:

- а) 436; б) 434; в) 464.

Решење: в)

ПРИМЕР 7

1. Вредност параметра m тако да збир квадрата решења једначине $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ буде $\frac{10}{9}$ је:

- а) $\frac{1}{2}$ или 2; б) -2 или $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$ или 2.

Решење: а)

2. Решење једначине $3 \log x + \frac{1}{2} \log a = 3 \log b + \log c$ је:

- а) $x = \frac{b^3 \sqrt{c}}{\sqrt[6]{a}}$; б) $x = \sqrt[3]{\frac{bc}{a}}$; в) $x = \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}$.

Решење: а)

3. Три броја, чији је збир 57, који чине геометријски низ и за које важи да је средњи члан $\frac{6}{13}$ од збира суседних, су:

- а) 10, 20, 27; б) 12, 18, 29; в) 12, 18, 27.

Решење: в)

4. У трапезу је средња линија 2 пута дужа од једне основице и за 7,5 дужа од половине друге основице. Дужине тих основица су:

- а) 30 и 45; б) 15 и 30; в) 15 и 45.

Решење: в)

5. Услов да права $Ax + y - 5 = 0$ додирује елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$ је да параметар A има вредност:

- а) $A = \pm 1$; б) $A = \pm 2$; в) $A = 0$.

Решење: а)

ПРИМЕР 8

1. Упрости облик израза $A = \frac{ab^{-2} \cdot (a^{-1}b^2)^4 \cdot (ab^{-1})^2}{a^{-2}b \cdot (a^2b^{-1})^3 \cdot a^{-1}b}$ за $a = 10^{-3}$, $b = 10^{-2}$ има вредност једнаку:

- а) 10; б) 100; в) 1000.

Решење: б)

2. Решење једначине $\sqrt[3]{64} - 5 \cdot \sqrt[3]{2^{x+3}} + 16 = 0$ је:

- а) 2 или 8; б) 2 или 1; в) 1 или 3.

Решење: в)

3. Вредност израза $A = \cos^2 18^\circ + \cos^2 36^\circ + \cos^2 54^\circ + \cos^2 72^\circ$ је:

- а) 1; б) 2; в) 0.

Решење: б)

4. Ако је број дијагонала многоугла једнак 20, онда је збир унутрашњих углова тог многоугла једнак:

- а) 1000°; б) 1080°; в) 1120°.

Решење: б)

5. Дужина бочне ивице правилне шестостране пирамиде је два пута већа од основне ивице. Ако је висина пирамиде $4\sqrt{3}$, онда је њена запремина:

- а) 100; б) 96; в) 80.

Решење: б)

ПРИМЕР 9

1. Вредност параметра m тако да решења једначине $2x^2 + 5x + 2m^2 - 4m + 2 = 0$ задовољавају услов $x_1 - 2x_2 = -1$ је:

- а) 0; б) 2; в) 0 или 2.

Решење: в)

2. Ако је $\log_{25} 7 = a$ и $\log_2 5 = b$, онда је $\log_{\sqrt[3]{5}} 6,125$ једнак:

- а) $12a - \frac{9}{b}$; б) $12a + \frac{9}{b}$; в) $12a - \frac{b}{9}$.

Решење: а)

3. Тринаести члан аритметичког низа $-2, -6, -10, \dots$ је:

- а) 50; б) -26; в) -50.

Решење: в)

4. Ако је укупан број дијагонала многоугла једнак 20, онда је број дијагонала које полазе из једног темена тог многоугла једнак:

- а) 4; б) 5; в) 6.

Решење: б)

5. Површина осног пресека ваљка је 16. Ако је полупречник ваљка два пута већи од висине, онда је површина тог ваљка :

- а) 32π ; б) 36π ; в) 48π .

Решење: в)

ПРИМЕР 10

1. Упрошћен израз $\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$ има вредност једнаку:

- а) $2b$; б) $2a$; в) $2a+2b$.

Решење: а)

2. Решење једначине $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$ је:

- а) ± 1 ; б) ± 2 ; в) ± 3 .

Решење: б)

3. Упрошћен израз $\frac{1+tg^4x}{tg^2x+ctg^2x}$ има облик:

- а) tg^2x ; б) ctg^2x ; в) tg^4x .

Решење: а)

4. У једнакокром троуглу збир трећине угла при врху и половине једног од углова на основици износи 48° . Углови тог троугла су:

- а) $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$; б) $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$; в) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.

Решење: б)

5. Услов да права $2x + y + m = 0$ буде тангента кружнице $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ је да параметар m има вредност:

- а) $m = -3 - 2\sqrt{5}$; б) $m = -3 \pm 2\sqrt{5}$; в) $m = -3 + 2\sqrt{5}$.

Решење: б)

ПРИМЕР 11

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}$ је:

- а) $1 - \sqrt{7}$; б) $1 + \sqrt{7}$; в) $(1 + \sqrt{7})^2$; г) 25; д) 0.

Решење: г)

2. Ако је $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ тада је $\log_{45} 100$ једнак:

- а) $\frac{2a+2}{2b+1}$; б) $\frac{b+1}{a+2}$; в) $a - b$; г) $\frac{20}{9}$; д) ни један од ових одговора.

Решење: а)

3. Израз $\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{2 - \sin 2x}$ идентички је једнак:

- а) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\frac{\cos x + \sin x}{2}$; в) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) 1; д) 0.

Решење: б)

4. Бројеви a_1, a_2, a_3 чине геометријску прогресију. Ако је $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 343$ и $a_2 - a_1 = 5$ тада је $a_1 + a_2 + a_3$ једнако:

- а) 7; б) $\frac{49}{2}$; в) $\frac{67}{2}$; г) $\frac{67}{3}$; д) 100.

Решење: в)

5. Запремина правилне троугране пирамиде чија је основна ивица $a = 3\sqrt{3}$ и бочна ивица $s = 5$ једнака је:

- а) 4; б) $9\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{3}$; г) 36; д) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Решење: б)

ПРИМЕР 12

1. Ако је $a \in R \setminus \{1\}$ тада је израз $\frac{4a^2+9a+5}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{6}{1-a}$ једнак:

- а) $\frac{a+1}{a-1}$; б) 6; в) $\frac{12}{a-1}$; г) a^2 ; д) $1 + a^2$.

Решење: в)

2. Збир корена једначине $4x^2 + 5 - 8x = 0$ једнак је:

- а) 8; б) -5; в) $-\frac{5}{4}$; г) -2; д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

3. Укупан број дијагонала правилног многоугла чији је унутрашњи угао три пута већи од суседног спољашњег угла је:

- а) 20; б) 44; в) 18; г) 54; д) 28.

Решење: а)

4. Правоугли троугао чија је хипотенуза 13 cm и једна катета 12 cm ротира око те катете. Запремина тако насталог тела једнака је:

- а) $90\pi \text{ cm}^3$; б) $100\pi \text{ cm}^3$; в) 314 cm^3 ; г) $\frac{25}{3}\pi$; д) 100 cm^3 .

Решење: б)

5. Једначина тангенте повучена из тачке $A(6,8)$ на параболу $y^2 = 8x$ једнака је:

- а) $y = 2x + 1$; б) $x + y + 2 = 0$; в) $\frac{1}{3}x + y = 3$;
г) $x - y - 2 = 0$; д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

ПРИМЕР 13

1. Ако је $x = \left(\frac{2}{a-1}\right)^{-1}$ тада је вредност израза $\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{2x-1}{x}\right)$ једнака:

- а) $\frac{1+a}{1-a}$; б) 0; в) $\frac{1-a}{1+a}$; г) $a - 1$; д) 1.

Решење: а)

2. Решење једначине $3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192$ је:

- а) 1; б) 0; в) -2; г) $\frac{1}{2}$; д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

3. Израз $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$ за $\alpha \neq k\pi$ идентички је једнак:

- а) $tg^2 \frac{\alpha}{2}$; б) $ctg \alpha$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin \frac{\alpha}{2}$; д) 0.

Решење: а)

4. Збир првих 50 чланова аритметичког низа је 200, а збир следећих 50 чланова је 2700. Први члан низа је:

- а) 3; б) 122; в) -21,5; г) -20,5; д) 3,5.

Решење: г)

5. Полупречник лопте увећан је за 50%. Тада се површина лопте повећава за:

- а) 50%; б) 100%; в) 25%; г) 225%; д) 125%.

Решење: д)

ПРИМЕР 14

1. Збир $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}$ једнак је:

- а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; г) 3; д) 0.

Решење: б)

2. Ако су x_1, x_2 решења једначине $3x^2 - x - 7 = 0$ тада је $x_1^3 \cdot x_2^3$ једнако:

- а) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$; б) $\frac{193}{27}$; в) $-\left(\frac{7}{3}\right)^3$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; д) $\left(\frac{7}{3}\right)^3$.

Решење: в)

3. Ако је полупречник описане кружнице око једнакостраничног троугла $R = 2\sqrt{3}$, тада је површина тог троугла једнака:

- а) 36; б) $9\sqrt{3}$; в) 12; г) 27; д) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Решење: б)

4. Ако је површина базе правилне четворостране пирамиде 144 cm^2 а површина омотача 192 cm^2 , тада је збир свих ивица те пирамиде једнак:

- а) 88 cm; б) 12 cm; в) 40 cm; г) 48 cm; д) 20 cm.

Решење: а)

5. Једначина праве која пролази кроз пресек правих $x + y - 1 = 0$ и $2x - y - 5 = 0$ и нормалана је са правом $3x - y - 2 = 0$ гласи:

- а) $y = 3x - 1$; б) $x + y + 2 = 0$; в) $y = \frac{1}{3}x + 3$; г) $x + 3y + 1 = 0$; д) $y = 3x + 1$.

Решење: г)

ПРИМЕР 15

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2}\right) : \frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$ за $a = 0,003$ и $b = 5,994$ једнака је:

- а) -2; б) 6,124; в) 5,997; г) 2; д) -1,2.

Решење: г)

2. Производ решења једначине $\sqrt{x^2 - 9} + x^2 - 9 = 20$ је:

- а) 25; б) 0; в) -25; г) 1; д) 20.

Решење: в)

3. Решења једначине $\sin x + \cos 2x = 1$ су:

- а) $x = k\pi$; б) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$;
в) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; г) $x = 2k\pi$; д) $x = \frac{k\pi}{2}$.

Решење: б)

4. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 54. Ако је највећи од њих два пута већи од најмањег, тада је производ та три броја једнак:

- а) 2000; б) 5184; в) 9832; г) 368; д) 1154.

Решење: б)

5. Обим већег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је 22 cm. Висина призме је за 1 cm краћа од основне ивице. Запремина те призме је:

- а) 72 cm^3 ; б) $72\sqrt{3} \text{ cm}^3$; в) 64 cm^3 ; г) $72\pi \text{ cm}^3$; д) $48\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Решење: б)

ПРИМЕР 16

1. Ако је $f(1-x) = 3 - 2x$ тада је $f(x)$ једнако:

- а) $2x + 1$; б) $8 - x$; в) $2x + 3$; г) $1 - x$; д) $x + 3$.

Решење: а)

2. Скуп решења неједначине $\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} \geq 1$ је :

- а) $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$; б) $(-1, +\infty)$; в) $(3, +\infty)$;
г) $(-1, 3)$; д) $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Решење: д)

3. Решења једначине $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ су:

- а) $x_1 = 4, x_2 = 8$; б) $x = 3$; в) $x_1 = 3, x_2 = 9$;
г) $x_1 = 3, x_2 = 11$; д) $x_1 = 11, x_2 = 15$.

Решење: г)

4. Тетива круга је за 2 см мања од пречника, а одстојање центра круга од тетиве је за 2 см мање од полупречника. Дужина тетиве је:

- а) 5 см; б) 8 см; в) 12 см; г) 1 см; д) 10 см.

Решење: б)

5. Једначина круга чији је центар тачка $C(0,4)$ и садржи тачку $(5, -8)$ је:

- а) $x^2 + (y - 4)^2 = 144$; б) $x^2 + (y - 4)^2 = 169$;
в) $(x - 4)^2 + y^2 = 169$; г) $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 10$.

Решење: б)

ПРИМЕР 17

1. Вредност израза $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$ једнака је:

- а) -1 ; б) $\sqrt{3}$; в) 1 ; г) $\sqrt{3} + 3$; д) $\sqrt{3} + 2$.

Решење: в)

2. Збир решења једначине $\sqrt{10+x} - \sqrt{10-x} = \sqrt{2x-8}$ је:

- а) 10; б) 12; в) 14; г) 0; д) 1.

Решење: в)

3. Скуп решења неједначине $\left| \frac{2x+3}{2x-3} \right| < 1$ је:

- а) $(0, +\infty)$; б) $(-\infty, 0)$; в) $(3, 4)$; г) $(-2, 3)$; д) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Решење: б)

4. Количник геометријског низа који се састоји од шест чланова, чији је збир прва три члана 168, а збир последња три 21, је:

- а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) -2.

Решење: б)

5. Висина купе је 12 cm, а површина осног пресека је 42 cm^2 . Површина те купе је:

- а) $56\pi \text{ cm}^2$; б) $49\pi \text{ cm}^2$; в) 56 cm^2 ;
г) 49 cm^2 ; д) $36\pi \text{ cm}^2$.

Решење: а)

ПРИМЕР 18

1. Производ решења једначине $|3x - 2| + x = 2$ је:

- а) 1; б) 0; в) 2; г) -1; д) -2.

Решење: б)

2. Решења једначине $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$ су:

- а) $x = k\pi$; б) $x_1 = 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + 4k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$;
в) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; г) $x = 2k\pi$; д) $x = \frac{k\pi}{2}$.

Решење: б)

3. Решење једначине $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$ је:

- а) $x_1 = -3, x_2 = 3$; б) $x = 9$; в) $x_1 = 3, x_2 = 5$;
г) $x_1 = 4, x_2 = 5$; д) ни један од ових одговора.

Решење: б)

4. Хипотенуза c и катета a правоуглог троугла су узастопни природни бројеви. Квадрат друге катете је:

- а) $c \cdot a$; б) $\frac{c}{a}$; в) $c + a$; г) $c - a$; д) ни један од ових одговора.

Решење: в)

5. Координате центра и полупречник круга чија је једначина $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$ су:

- а) $C(0,0), r = 25$; б) $C(2,2), r = 5$; в) $C(0,2), r = 5$;
г) $C(0,2), r = 25$; д) ни један од ових одговора.

Решење: в)

ПРИМЕР 19

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}\right) : \frac{1}{\sqrt{3}}$ једнака је:

- а) 6; б) $\frac{1}{2}$; в) 4; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3} + 2$.

Решење: а)

2. Ако m људи ураде један посао за d дана, тада ће $m + r$ људи урадити тај исти посао за:

- а) $d + r$ дана; б) $d - r$ дана; в) $\frac{md}{m+r}$ дана;
г) $\frac{d}{m+r}$ дана; д) $\frac{d}{m-r}$ дана.

Решење: в)

3. Производ решења једначине $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$ је:

- а) 9; б) 3; в) $\frac{1}{3}$; г) 27; д) -2.

Решење: б)

4. Почетна три члана аритметичког низа су $x - 1, x + 1, 2x + 3$ и то у датом редоследу. Тада је x једнако:

- а) 2; б) 0; в) -2; г) 4; д) ни један од ових одговора.

Решење: б)

5. Растојање центра кружнице $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ од тачке $M(-1,2)$ је:

- а) -1; б) 1; в) 2; г) $\sqrt{2}$; д) 0.

Решење: д)

ПРИМЕР 20

1. Ако се израз $\frac{a^2-b^2}{ab} - \frac{ab-b^2}{ab-a^2}$ под условима $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$, сведе на најпростији случај, добија се:

- а) a^2 ; б) $\frac{a}{b}$; в) $a - 2b$; г) $\frac{a^2-2b^2}{ab}$; д) b^2 .

Решење: б)

2. Корени једначине $3(m-1)x^2 - 4(m-1)x + 2m - 1 = 0$ задовољавају услов $x_2 = 3x_1$ за:

- а) $m = 3$; б) $m = 0$; в) $m = \frac{3}{2}$; г) $m = \frac{4}{3}$; д) $m = 1$.

Решење: б)

3. Вредност израза $\frac{\cos 2\alpha - \cos \alpha}{\sin(\alpha+15^\circ) + \sin \alpha}$ за $\alpha = 30^\circ$ је:

- а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - 1$; в) $\sqrt{6} + 2$.

Решење: б)

4. Ако дужу страницу правоугаоника повећамо за 10% а другу смањимо за 10%, тада се површина правоугаоника:

- а) смањи за 10%; б) повећа за 10%; в) не мења;
г) смањи за 1%; д) повећа за 1%.

Решење: г)

5. Запремина квадра чији је однос ивица 3:4:12, а дијагонала $D = 26$ cm, једнака је:

- а) 1152 cm^3 ; б) 768 cm^3 ; в) 1156 cm^3 ; г) 1134 cm^3 ; д) 932 cm^3 .

Решење: а)

РЕШЕНИ ЗАДАЦИ СА РАНИЈЕ ОДРЖАНИХ ПРИЈЕМНИХ ИСПИТА

2015.

Задатак 1.

У скупу целих бројева збир решења једначине $|2x - 3| - |x + 2| = 3 - x$ је:

- А) 2 ; Б) 0 ; В) -1 ; Г) 3.

Решење:

Како је $|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$ и $|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -2 - x, & x < -2 \end{cases}$, то x може

припадати следећим интервалима $(-\infty, -2)$; $[-2, \frac{3}{2})$; $[\frac{3}{2}, \infty)$. Разликујемо три случаја:

1) $x < -2$, 2) $-2 \leq x < \frac{3}{2}$, 3) $x \geq \frac{3}{2}$.

	$x < -2$	$-2 \leq x < \frac{3}{2}$	$x \geq \frac{3}{2}$
$ 2x - 3 $	$3 - 2x$	$3 - 2x$	$2x - 3$
$ x + 2 $	$-2 - x$	$x + 2$	$x + 2$

1) За $x \in (-\infty, -2)$ дата једначина еквивалентна је једначини $3 - 2x - (-2 - x) = 3 - x \Leftrightarrow 5 - x = 3 - x$, па једначина у овом случају нема решења.

2) За $x \in [-2, \frac{3}{2})$ дата једначина постаје $3 - 2x - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow 1 - 3x = 3 - x \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

3) За $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$$2x - 3 - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Дакле, $x = -1$ и $x = 4$ су решења полазне једначине, па је збир решења $-1 + 4 = 3$.

Одговор: Г)

Задатак 2.

Ако је $\log 5 = a$, $\log 3 = b$, тада је $\log_{30} 8$ једнако:

- А) $\frac{3-3a}{b+1}$; Б) $\frac{2-2a}{b+1}$; В) $\frac{3+3a}{b+1}$; Г) $\frac{2-2b}{a+1}$.

Решење:

На основу особина логаритама добија се:

$$\log_{30} 8 = \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{\log 2^3}{\log 3 \cdot 10} = \frac{3 \log 2}{\log 3 + \log 10} = \frac{3 \log \frac{10}{5}}{\log 3 + \log 10} = \frac{3 \cdot (\log 10 - \log 5)}{\log 3 + \log 10} = \frac{3 \cdot (1-a)}{b+1} = \frac{3-3a}{b+1}$$

Одговор: А)

Задатак 3.

Вредност израза $(1 - \sin \frac{\pi}{12}) \cdot (1 + \sin \frac{\pi}{12})$ је:

- А) 2 ; Б) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; Г) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Решење:

Користећи формулу за разлику квадрата и одговарајуће тригонометријске идентитете добија се:

$$\begin{aligned} (1 - \sin \frac{\pi}{12}) \cdot (1 + \sin \frac{\pi}{12}) &= 1 - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Одговор: Г)

Задатак 4.

Збир прва четири члана аритметичког низа једнак је 2, а следећа 4 једнак је 18. Број чланова овог низа које треба сабрати да би се добио збир 35 је:

- А) 10 ; Б) 14 ; В) 20 ; Г) 16.

Решење:

Према условима задатка $S_4 = 2$ и $S_8 = S_4 + 18 = 20$. Из формуле за збир првих n чланова аритметичког низа $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ и датих услова добија се следећи систем линеарних једначина $\frac{4}{2}(2a_1 + (4-1)d) = 2 \wedge \frac{8}{2}(2a_1 + (8-1)d) = 20$ тј. $4a_1 + 6d = 2 \wedge 8a_1 + 28d = 20$. Овај систем има решења $a_1 = -1$ и $d = 1$. Ако је n број првих чланова низа чији је збир 35, онда је $\frac{n}{2}(-2 + (n-1)) = 35$, односно $n^2 - 3n - 70 = 0$. Решавањем квадратне једначине добија се $n = 10$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Ако су $AB = c$, $AC = b$, две странице троугла ABC и збир висина h_c и h_b једнак је трећој висини h_a ($h_a = h_c + h_b$), тада је страница a овог троугла једнака:

А) $\frac{bc}{b+c}$; Б) $\frac{b}{b+c}$; В) $\frac{c-b}{bc}$; Г) $\frac{c+b}{b}$.

Решење:

Како је површина троугла $= \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, то је $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$ и како за висине овог троугла важи $h_a = h_c + h_b$ добија се $\frac{2P}{a} = \frac{2P}{c} + \frac{2P}{b}$, одакле следи $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{b+c}{cb}$, те је $a = \frac{bc}{b+c}$.

Одговор: А)

2016.

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \left(\frac{x-4}{2x-5}\right)^{-1}\right) \div \frac{5}{x-4}$ је:

а) 2 б) $x + 2$ в) $2x$ г) 1

Решење:

$$\begin{aligned} & \text{За } x \geq 0, x \neq 4 \\ & \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \left(\frac{x-4}{2x-5}\right)^{-1}\right) \div \frac{5}{x-4} \\ & = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} - \frac{2x-5}{x-4}\right) \div \frac{5}{x-4} \\ & = \left(\frac{x-2\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}-2x+5}{x-4}\right) \cdot \frac{x-4}{5} = \frac{5}{x-4} \cdot \frac{x-4}{5} = 1 \end{aligned}$$

Одговор: Г)

Задатак 2.

Једначина $\sin \frac{x}{6} + \cos \frac{x}{3} = 1$ има на интервалу $[0, 2\pi)$

а) два решења б) три решења в) пет решења г) нема решења

Решење:

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{6} + \cos \frac{x}{3} = 1 & \Leftrightarrow \sin \frac{x}{6} = 1 - \cos \frac{x}{3} \Leftrightarrow \sin \frac{x}{6} = 2 \sin^2 \frac{x}{6} \Leftrightarrow \sin \frac{x}{6} (2 \sin \frac{x}{6} - 1) = \\ 0 & \Leftrightarrow \sin \frac{x}{6} = 0 \vee \sin \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = k\pi \vee \frac{x}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{x}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = 6k\pi \vee \\ x & = \pi + 12k\pi \vee x = 5\pi + 12k\pi \end{aligned}$$

Како решење треба припадати интервалу $[0, 2\pi)$ то су решења $x=0$ и $x = \pi$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Бројеви $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 19)$, представљају три узастопна члана аритметичког низа за:

а) $x = 1$ б) $x = \log_2 3$ в) $x = \log_5 2$ г) $x = 3$

Решење:

Како је разлика два узастопна члана аритметичког низа константна то је:

$$\log(2^x + 1) - \log 3 = \log(2^x + 19) - \log(2^x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{2^x + 1}{3}\right) = \log\left(\frac{2^x + 19}{2^x + 1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2^x + 1}{3} = \frac{2^x + 19}{2^x + 1} \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 3 * (2^x + 19) \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^2 + 2 * 2^x + 1 = 3 * 2^x + 57 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 56 = 0,$$

Након увођења смене $t = 2^x, t > 0$. Једначина се своди на $t^2 - t - 56 = 0$ чија су решења $t_1=8$ и $t_2=-7$. Како је $t > 0$ то је решење које задовољава услов $t = 8$, односно $2^x=8=2^3$ одакле је $x=3$.

Одговор: Г)

Задатак 4.

Површина једнакостраничног троугла је $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Површина кружног прстена који граде описани и уписани круг тог троугла је:

а) $4\pi \text{ cm}^2$. б) 12 cm^2 в) $16\sqrt{3}\text{cm}^2$ г) $64\pi \text{ cm}^2$

Решење:

Означимо са a страницу троугла и h висину. Применом формуле за површину троугла $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, добија се: $4\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 16$, одакле је $a = 4\text{cm}$. Како је површина кружног прстена $P = (R^2 - r^2)\pi$ и $R = \frac{2}{3}h, r = \frac{1}{3}h$ заменом у формули за површину кружног прстена добија се $P = \left(\frac{4}{9}h^2 - \frac{1}{9}h^2\right)\pi = \frac{1}{3}h^2\pi$. Заменом $h = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{cm}$ добија се $P = 4\pi \text{ cm}^2$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Једначине тангенте круга $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ које пролазе кроз пресек правих $x - 2y - 8 = 0$ и $y = 3x - 14$ су:

а) $y = 2x - 10$ б) $y = x + 10$ в) $y - 2x = 10$ г) $y = x - 1$ и
и $2y + x = 0$ и $y = 2x - 10$ и $y = 2x + 10$ $y + 2x = 10$

Решење:

Права $y = kx + n$ додирује кружницу $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ако је испуњен услов додира $(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1)$. Једначина кружнице може се записати у облику: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$. Центар ове кружнице је тачка $C = (1, -3)$, и полупречник $r = \sqrt{5}$. Решавањем система $x - 2y - 8 = 0$ и $3x - y - 14 = 0$ добија се пресечна тачка $P = (4, -2)$. Заменом у једначини тангенте $y = kx + n$ добија се $n = -4k - 2$. Из услова додира тангенте и кружнице добија се $(k + 3 - 2 - 4k)^2 = 5(k^2 + 1)$. Након сређивања претходне једначине добија се $4k^2 - 6k - 4 = 0$. Одакле је $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = 2$, а тражене једначине тангенти су: $y = 2x - 10$ и $2y + x = 0$

Одговор: А)

2017.

Задатак 1.

Збир решења једначине $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3 - x$ је:

- а) 2; б)
- $x + 2$
- ; в)
- $2x$
- ; г) 3.

Решење:

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3 - x \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 3)^2} - \sqrt{(x + 2)^2} = 3 - x$$

$$x \Leftrightarrow |2x - 3| - |x + 2| = 3 - x$$

$$\text{Како је } |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x, & x < \frac{3}{2} \end{cases} \text{ и } |x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -2 - x, & x < -2 \end{cases}, \text{ то } x \text{ може}$$

припадати следећим интервалима $(-\infty, -2)$; $[-2, \frac{3}{2})$; $[\frac{3}{2}, \infty)$. Разликујемо три случаја:

- 1)
- $x < -2$
- , 2)
- $-2 \leq x < \frac{3}{2}$
- , 3)
- $x \geq \frac{3}{2}$
- .

	$x < -2$	$-2 \leq x < \frac{3}{2}$	$x \geq \frac{3}{2}$
$ 2x - 3 $	$3 - 2x$	$3 - 2x$	$2x - 3$
$ x + 2 $	$-2 - x$	$x + 2$	$x + 2$

1) За $x \in (-\infty, -2)$ дата једначина еквивалентна је једначини
$$3 - 2x - (-2 - x) = 3 - x \Leftrightarrow 5 - x = 3 - x, \text{ па једначина у овом случају нема решења.}$$
2) За $x \in [-2, \frac{3}{2})$ дата једначина постаје

$$3 - 2x - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow 1 - 3x = 3 - x \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1.$$

3) За $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$$2x - 3 - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Дакле, $x = -1$ и $x = 4$ су решења полазне једначине, па је збир решења $-1+4=3$.

Одговор: Г)

Задатак 2.

Ако је $\log 2 = a$, $\log 7 = b$, тада је $\log_5 9.8$ једнако:

а) $\frac{a+2b-1}{1-a}$; б) $\frac{2-2a}{b+1}$; в) $\frac{2-2b}{a+1}$; г) 1.96;

Решење:

На основу особина логаритама добија се:

$$\log_5 9.8 = \frac{\log 9.8}{\log 5} = \frac{\log \frac{98}{10}}{\log \frac{5}{2}} = \frac{\log 98 - \log 10}{\log 10 - \log 2} = \frac{\log 2 \cdot 49 - 1}{1-a} = \frac{\log 2 + \log 49 - 1}{1-a} = \frac{a + \log 7^2 - 1}{1-a} = \frac{a + 2\log 7 - 1}{1-a} = \frac{a + 2b - 1}{1-a}.$$

Одговор: А)

Задатак 3.

Вредност израза $\frac{\cos 81^\circ + \cos 71^\circ + \cos 21^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ + \sin 71^\circ - \sin 21^\circ - \sin 11^\circ}$ је:

а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\sqrt{3}$.

Решење:

Користећи формуле за трансформацију збира и разлике тригонометријских функција у производ добија се:

$$\begin{aligned} \frac{\cos 81^\circ + \cos 71^\circ + \cos 21^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ + \sin 71^\circ - \sin 21^\circ - \sin 11^\circ} &= \frac{\cos 81^\circ + \cos 21^\circ + \cos 71^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ - \sin 21^\circ + \sin 71^\circ - \sin 11^\circ} \\ &= \frac{2 \cos \frac{81^\circ - 21^\circ}{2} \cos \frac{81^\circ + 21^\circ}{2} + 2 \cos \frac{71^\circ - 11^\circ}{2} \cos \frac{71^\circ + 11^\circ}{2}}{2 \sin \frac{81^\circ - 21^\circ}{2} \cos \frac{81^\circ + 21^\circ}{2} + 2 \sin \frac{71^\circ - 11^\circ}{2} \cos \frac{71^\circ + 11^\circ}{2}} \\ &= \frac{2 \cos 30^\circ \cos 51^\circ + 2 \cos 30^\circ \cos 41^\circ}{2 \sin 30^\circ \cos 51^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 41^\circ} \\ &= \frac{2 \cos 30^\circ (\cos 51^\circ + \cos 41^\circ)}{2 \sin 30^\circ (\cos 51^\circ + \cos 41^\circ)} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Одговор: Г)

Задатак 4.

Нумеричке вредности страница троугла су чланови аритметичког низа. Странице се разликују за 3 cm . Ако је обим тог троугла 36 cm , онда је површина кружног прстена који граде описани и уписани круг тог троугла

а) $\frac{189}{4} \pi \text{ cm}^2$; б) 12 cm^2 ; в) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$; г) $64\pi \text{ cm}^2$.

Решење:

Нека су $a - d$, a , $a + d$ чланови аритметичког низа. Из услова задатка следи да је $d = 3$ и $a - d + a + a + d = 36$. Одатле је $a = 12$. Отуда су странице троугла $b = a - d = 9$, $a = 12$, $c = a + d = 15$ (у cm). С обзиром да су све три странице троугла познате површина се може израчунати помоћу Хероновог обрасца $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$. Заменом одговарајућих вредности следи да је $P = 54cm^2$. Како је полупречник уписаног круга $= \frac{P}{s} = \frac{54cm^2}{18cm} = 3cm$, а полупречник описаног круга $R = \frac{abc}{4P} = \frac{15}{2} cm$ то је површина кружног прстена $P = (R^2 - r^2)\pi = \frac{189}{4} \pi cm^2$.

Одговор: А)

Задатак 5.

У праву четворострану призму чија је основа једнакокраки трапез уписан је ваљак висине $H=10 cm$ и пречника основе $R = 12cm$. Ако је крак трапеца $c = 15cm$, тада је запремина призме:

- а) $1800cm^3$; б) $360cm^3$; в) $180cm^3$; г) $1440cm^3$.

Решење:

Како је ваљак уписан у призму, то је основа призме тангентни четвороугао, па су збирови наспрамних страница једнаки, тј. $a + b = 2c$, пречник основе ваљка једнак је висини основе призме $h = R = 12cm$. Површина основе призме $B_p = \frac{a+b}{2}h = 180cm^2$. Запремина призме $V_p = B_p \cdot H = 1800cm^3$.

Одговор: А)

2018.

Задатак 1.

Производ решења једначине $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x = 10$ је:

- а) 2; б) -2; в) -4; г) -16.

Решење:

Дату једначину можемо записати и у следећем облику: $(5 - 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} + (5 + 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 10$.

Како је $(5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6}) = 1$, то је $5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$.

Коришћењем смене да је $t = (5 - 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}}$, једначина добија облик: $t + \frac{1}{t} = 10$, односно, $t^2 - 10t + 1 = 0$.

Решења квадратне једначине су: $t_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ и $t_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Враћањем смене добија се:

$$(5 - 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 2 ;$$

$$(5 - 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5 + 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} = (5 - 2\sqrt{6})^{-1} \Rightarrow \frac{x}{2} = -1 \Rightarrow x_2 = -2 .$$

Производ решења једначине једнак је -4

Одговор: В)

Задатак 2.

Вредност израза $\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(2 + \sin 2x)}{\cos^3 x - \sin^3 x}$ једнака је:

- а) $\cos x + \sin x$; б) $2(\cos x + \sin x)$; в) $\cos^2 x + 1$; г) 2.

Решење:

Коришћењем формуле за разлику квадрата, разлику кубова и изражавањем синуса двоструког угла, дати израз је једнак:

$$\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(2 + \sin 2x)}{\cos^3 x - \sin^3 x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \cdot 2(1 + \sin x \cdot \cos x)}{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x)}$$

Скраћивањем истих чинилаца и коришћењем основног тригонометријског идентитета

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ добија се: } \frac{(\cos x + \sin x) \cdot 2(1 + \sin x \cdot \cos x)}{1 + \sin x \cdot \cos x} = 2(\cos x + \sin x)$$

Одговор: Б)

Задатак 3.

Ако су: $\log_7 \left(16 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}} \right)$, $\frac{x+1}{\log_2 7}$ и $\log_7 \left(\frac{1}{32} \cdot 2^{\frac{5x}{3}+7} \right)$ прва три члана аритметичког низа, тада је x једнако:

- а) 3; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{3}$.

Решење:

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и сређивањем степена истих основа, добија се:

$$a_1 = \log_7 \left(16 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}} \right) = \log_7 \left(2^4 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}} \right) = \log_7 2^{\frac{4x-1}{3}} ;$$

$$a_2 = \frac{x+1}{\log_2 7} = (x+1) \log_7 2 = \log_7 2^{x+1} ;$$

$$a_3 = \log_7 \left(\frac{1}{32} \cdot 2^{\frac{5x}{3}+7} \right) = \log_7 \frac{2^{\frac{5x}{3}+7}}{2^5} = \log_7 2^{\frac{5x}{3}+2} .$$

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, па је:

$$\log_7 2^{x+1} - \log_7 2^{\frac{4x-1}{3}} = \log_7 2^{\frac{5x}{3}+2} - \log_7 2^{x+1} .$$

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$\log_7 \frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = \log_7 \frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}} \Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}} .$$

Сређивањем степена броја 2, добија се:

$$2^{2x+2} = 2^{\frac{9x+5}{3}} \Leftrightarrow 2x+2 = \frac{9x+5}{3} \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} .$$

Одговор: Г)

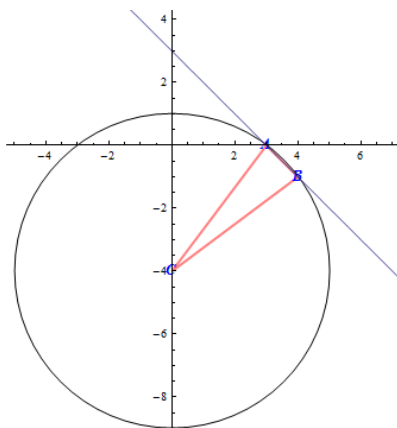
Задатак 4.

Обим и површина троугла који образују пресечне тачке праве $p: x + y - 3 = 0$ и кружнице $K: x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$ и центар дате кружнице је:

а) $O = 10 + \sqrt{2}$ б) $O = \frac{10-\sqrt{2}}{7}$ в) $O = 10 - \sqrt{2}$ г) $O = 10 + \sqrt{2} \text{ cm}$
 $P = \frac{7}{2}$; $P = \frac{-7}{2}$; $P = \frac{2}{7}$; $P = \frac{7}{2} \text{ cm}^2$.

Решење:

Пресечне тачке праве и кружнице (A и B) добијамо решавањем система једначина: $x + y - 3 = 0$ и $x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$; $A(3, 0)$ и $B(4, -1)$.



Троугао ABC је једнакокраки, јер је $AC = BC = r$. Свођењем једначине кружнице на општи облик, добија се: $K: x^2 + (y + 4)^2 = 25$, па је центар кружнице тачка $C(0, -4)$, а полупречник $r = 5$. Тако су познате две странице троугла: $AC = BC = r = 5$. Трећу страницу AB можемо добити као растојање између две тачке: $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{2}$. Обим троугла једнак је:

$$O = 5 + 5 + \sqrt{2} = 10 + \sqrt{2} .$$

Како су познате координате сва три темена троугла, површину троугла можемо израчунати преко формуле:

$$P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \frac{7}{2} .$$

Одговор: A)

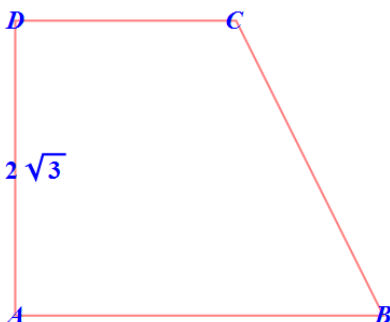
Задатак 5.

Површина тела које настаје ротацијом правоуглог трапеца $ABCD$ око мањег крака $D = 2\sqrt{3} \text{ cm}$, ако је површина трапеца $P = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ и разлика основица трапеца 6 cm , једнака је:

- а) $244\sqrt{3} \pi \text{ cm}^2$; б) $(45 + 18\sqrt{3})4 \pi \text{ cm}^3$; в) $(180 + 72)\sqrt{3} \pi \text{ cm}^2$; г) $(180 + 72\sqrt{3}) \pi \text{ cm}^2$.

Решење:

Правоугли траpez који ротира око мањег крака формира зарубљену купу, за коју важи да су полупречници основа једнаки основицама трапеца а висина зарубљене купе једнака је висини, односно, мањем краку трапеца. Површина зарубљене купе једнака је: $P = r_1^2 \pi + r_2^2 \pi + (r_1 + r_2) \pi s$.



Како је површина трапеца једнака:

$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{a+b}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 18 \text{ cm} .$$

Како је дата разлика основица $a - b = 6 \text{ cm}$, решавањем система добијамо основице, односно полупречнике основа:

$$\begin{aligned} r_1 &= a = 12 \text{ cm} \Rightarrow r_1^2 \pi = 144 \pi \text{ cm}^2, \\ r_2 &= b = 6 \text{ cm} \Rightarrow r_2^2 \pi = 36 \pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Изводница купе добија се Питагорином теоремом: $s^2 = BC^2 = h^2 + (a - b)^2 = 48 \text{ cm}^2$, па је $s = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

Површина зарубљене купе једнака је:

$$\begin{aligned} P &= r_1^2 \pi + r_2^2 \pi + (r_1 + r_2) \pi s = 144 \pi \text{ cm}^2 + 36 \pi \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm} \pi \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}, \\ P &= (180 + 72\sqrt{3}) \pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Одговор: Г)

2019.

Задатак 1.

Упрощен израз $\frac{x^2-x-1}{x-1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} \right)$ има вредност:

а) $\frac{x+1}{x^2-x-1}$; б) 1; в) $\frac{x^2-x-1}{2}$; г) x .

Решење:

Уз услове да је $x + 1 \neq 0$ и $x - 1 \neq 0$, односно, $x \neq -1$ и $x \neq 1$, дати израз једнак је:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x-1}{x-1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} \right) &= \frac{x^2-x-1}{x-1} : \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{x^2-x-1}{x-1} : \frac{2x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x-1}{x-1} : \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{x^2-x-1}{x-1} : \frac{2}{x-1} = \frac{x^2-x-1}{2}. \end{aligned}$$

Тачно решење задатка је под **в)** $\frac{x^2-x-1}{2}$.

Задатак 2.

Упрошћен израз $\frac{\sin 2x + \cos 2x - 1}{1 - \sin 2x}$ има вредност:

- а) $\cos x - \sin x$; б) $\frac{2 \sin x}{\cos x - \sin x}$; в) $\sin x$; г) 1.

Решење:

Уз услове да је $\cos x - \sin x \neq 0$, односно, $\cos x \neq \sin x$, што је испуњено за $x_1 \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ и $x_2 \neq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, дати израз једнак је:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x + \cos 2x - 1}{1 - \sin 2x} &= \frac{2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \\ &= \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{2 \sin x (\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{2 \sin x}{\cos x - \sin x}. \end{aligned}$$

Тачно решење задатка је под б) $\frac{2 \sin x}{\cos x - \sin x}$.

Задатак 3.

Квадрат збира свих реалних решења једначине $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$ је:

- а) 36; б) 26; в) 6; г) 16.

Решење:

Уз услове дефинисаности квадратних корена, $3x + 1 \geq 0$ и $x - 1 \geq 0$, односно, $x \geq -\frac{1}{3}$ и $x \geq 1$ што оба услова испуњава кад је $x \geq 1$, дата једначина је еквивалентна:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 2 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x+1 = 4 + 4\sqrt{x-1} + x-1 &\Leftrightarrow 2x-2 = 4\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x-1 = \\ 2\sqrt{x-1} &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0. \end{aligned}$$

Коришћењем Виетове формуле важи да је $x_1 + x_2 = 6$, па је $(x_1 + x_2)^2 = 36$.

Тачно решење задатка је под а) 36.

Задатак 4.

Странице правоуглог троугла су чланови аритметичког низа са разликом 2cm . Обим и површина тог троугла једнаки су:

- а) $O = 12\text{cm}$, $P = 24\text{cm}^2$; б) $O = 24\text{cm}$, $P = 24\text{cm}^2$; в) $O = 12\text{cm}$, $P = 12\text{cm}^2$; г) $O = 24$, $P = 48$.

Решење:

Странице правоуглог троугла су чланови аритметичког низа са разликом 2cm па важи релација: $a = b - 2\text{cm}$, b , $c = b + 2\text{cm}$. Применом Питагорине теореме можемо израчунати странице правоуглог троугла:

$$(b + 2)^2 = (b - 2)^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 + 4b + 4 = b^2 - 4b + 4 + b^2 \Leftrightarrow b^2 - 8b = 0 \Leftrightarrow b(b - 8) = 0.$$

Како је b страница троугла, једино прихватљиво решење је $b = 8\text{cm}$, одакле је $a = 6\text{cm}$ и $c = 10\text{cm}$. Обим и површина тог троугла биће једнаки:

$$O = a + b + c = 6\text{cm} + 8\text{cm} + 10\text{cm} = 24\text{cm}, \quad P = \frac{ab}{2} = \frac{6\text{cm} \cdot 8\text{cm}}{2} = 24\text{cm}^2.$$

Тачно решење задатка је под **б) $O = 24\text{cm}$, $P = 24\text{cm}^2$.**

Задатак 5.

У ваљак са површином базиса $36\pi\text{cm}^2$ и запремином $120\pi\text{cm}^3$ уписана је правилна призма чија је основа многоугао са збиром унутрашњих углова 720° . Површина и запремина те призме су:

- а) $P = 36(3\pi + 10)\text{cm}^2$, $V = 540\pi\text{cm}^3$; б) $P = 27(2\sqrt{3} + 14)\text{cm}^2$, $V = 270\sqrt{3}\text{cm}^3$;
в) $P = 36(3\sqrt{3} + 10)\text{cm}^2$, $V = 540\sqrt{3}\text{cm}^3$; г) $P = 27(2\pi + 14)\text{cm}^2$, $V = 270\pi\text{cm}^3$.

Решење:

Из услова да је површина базиса ваљка $B_v = r^2\pi = 36\pi\text{cm}^2$, добија се $r = 6\text{cm}$, а из услова да је запремина ваљка $V_v = 2\pi rH = 120\pi\text{cm}^3$, добија се $H = 10\text{cm}$.

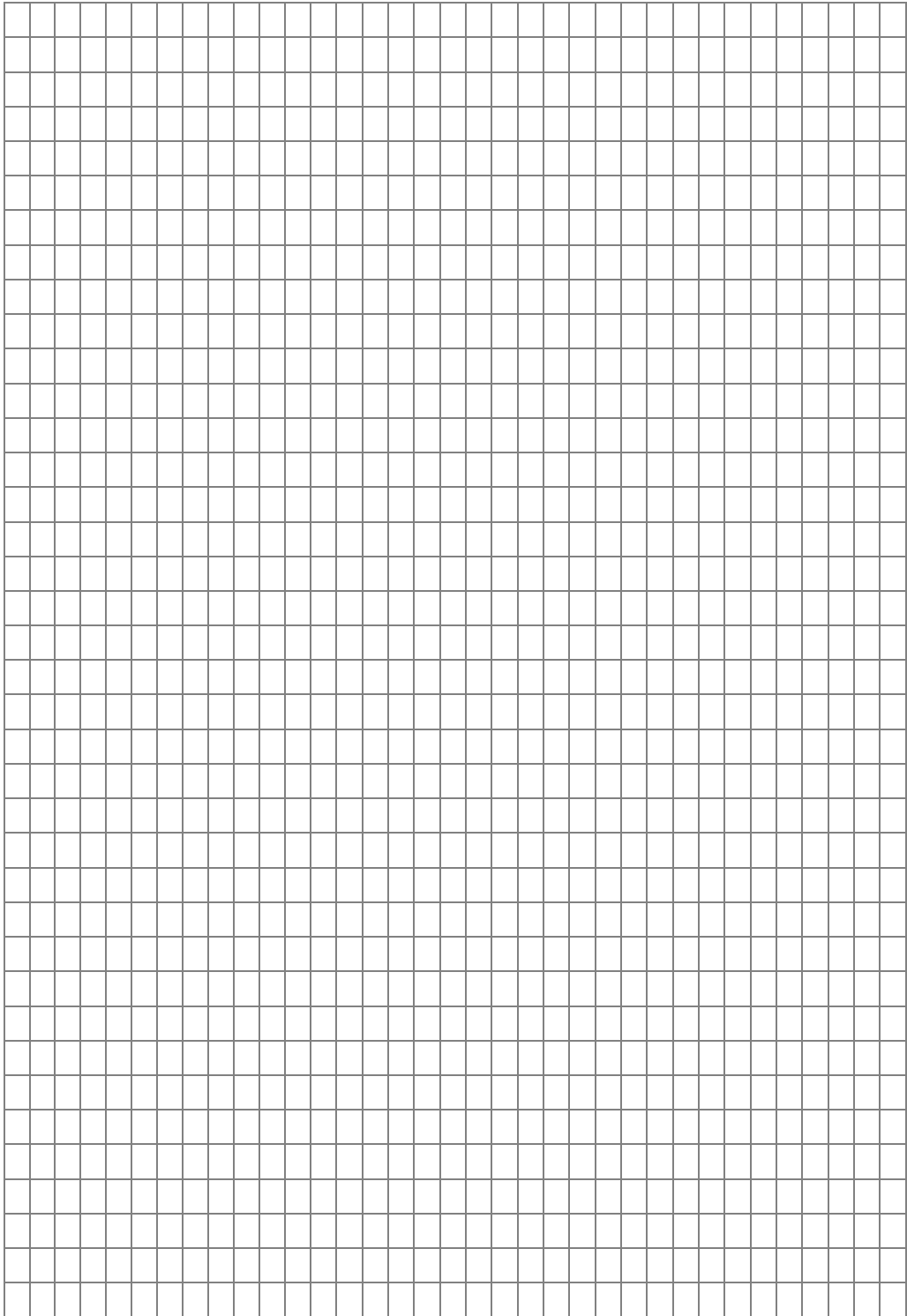
Како је основа призме многоугао са збиром унутрашњих углова 720° , важи да је: $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$, одакле се добија да је $n = 6$, односно да је у основи призме правилни шестоугао и да је $r = a$. Тада су површина и запремина уписане призме у ваљак једнаке:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 6 \cdot \frac{(6\text{cm})^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 6\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 360\text{cm}^2 \\ = 36(3\sqrt{3} + 10)\text{cm}^2,$$

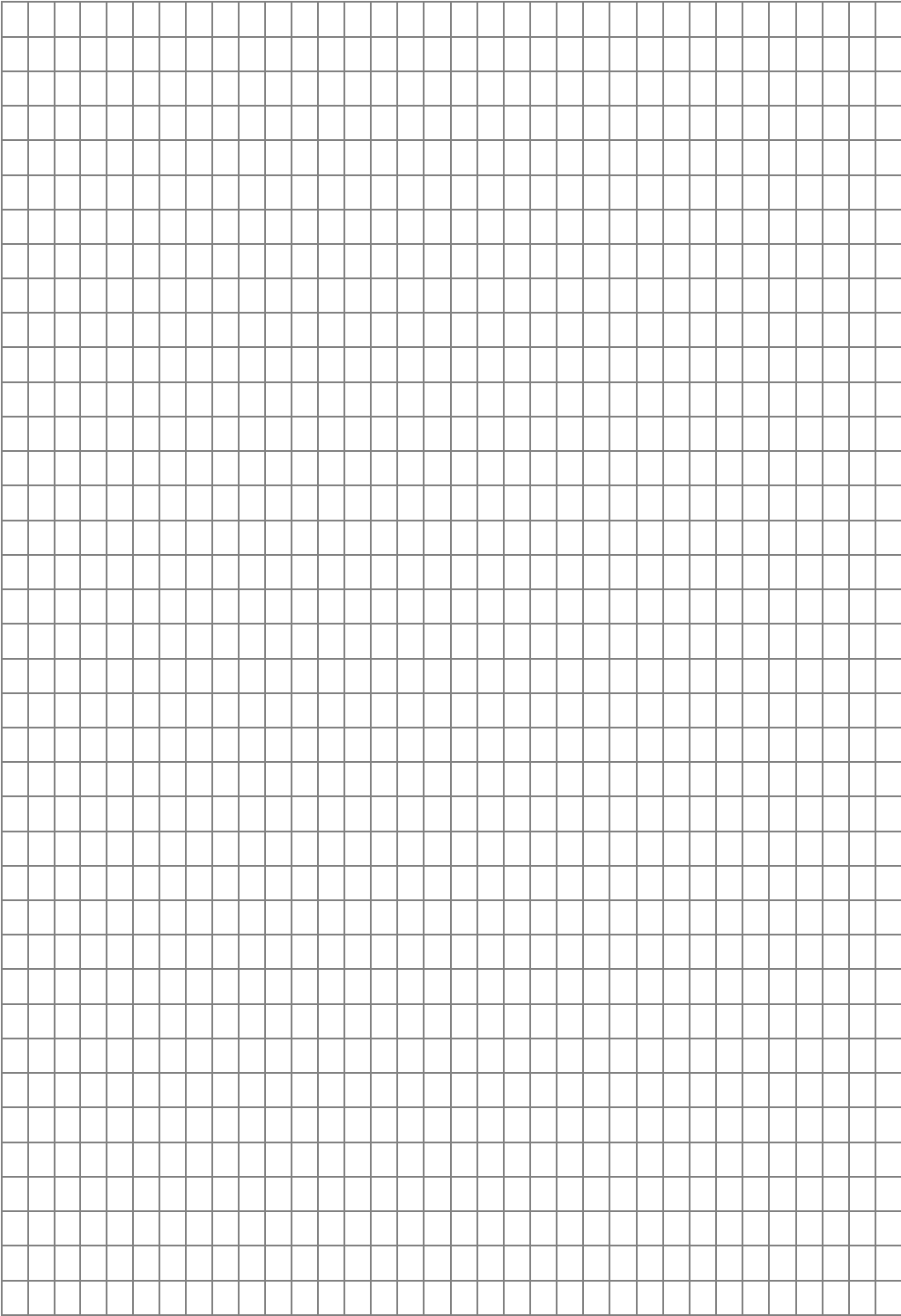
$$V = B \cdot H = 6 \cdot \frac{(6\text{cm})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 10\text{cm} = 540\sqrt{3}\text{cm}^3.$$

Тачно решење задатка је под **в)** $P = 36(3\sqrt{3} + 10) \text{ cm}^2$, $V = 540\sqrt{3}\text{cm}^3$.

БЕЛЕШКЕ:



БЕЛЕШКЕ:



БЕЛЕШКЕ:

