Polinomi

predavanja

Osnovne definicije

- **Definicija 1.** Opšti oblik polinoma n-tog stepena je

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

gde su

$a_k \in$R, k= 0,1,...,n ($a_n \neq 0$) - koeficijenti polinoma,

a_0 - slobodan član

x- promenljiva

Ako je koeficijent $a_n \neq 0$, za polinom $P(x)$ kažemo da je *stepena* n i to označavamo sa $\operatorname{dg} P(x) = n$. Za koeficijent $a_n \neq 0$ kažemo da je *vodeći* ili *najstariji koeficijent* polinoma $P(x)$.

Primer 1.

$$P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$$

ovaj polinom je stepena 3 a najstariji koeficijenat je 4.

- slobodan član dobija se kada umesto x stavimo 0, $P(0) = 7$

Polinom nultog stepena je konstanta:

$$P_0(x) = a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R},\ (a_0 \neq 0).$$

Specijalno, ako je u prethodnom polinomu $a_0 = 0$, tada takav polinom nazivamo nula polinom.

Polinom prvog stepena je oblika:

$$P_1(x) = a_1 x + a_0, \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ (a_1 \neq 0).$$

i se naziva linearna funkcija.Polinom drugog stepena je oblika:

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ (a_2 \neq 0).$$

i naziva se kvadratna funkcija.

Polinom trećeg stepena je oblika:

$$P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},$$
$$(a_3 \neq 0).$$

i naziva se kubna funkcija.

Primeri

degree	common name	example	leading coefficient	leading term
0	constant	2	2	2
1	linear	$3x - 1$	3	$3x$
2	quadratic	$x^2 + 2x - 4$	1	x^2
3	cubic	$-x^3 - x$	-1	$-x^3$
4	quartic	$\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}x^4$
5	quintic	$-3x^5 + x^2 - 12$	-3	$-3x^5$

- **Definicija 2**. Za polinom

$$O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n$$

kažemo da je *nula polinom*

- Stepen nula polinoma se ne definiše, smatra se da je neodređenog stepena.
- **Definicija 3**. Za polinom čiji je vodeći koeficijent jednak jedinici kažemo da je *moničan*, ima oblik

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

- **Definicija 3.** Polinomi

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

su *jednaki* ako i samo ako je $a_k = b_k$ za svako $k \geq 0$, tj. kada su njihovi koeficijenti jednaki.

- **Definicija 4.** *Nula polinoma* je broj $a \in C$ za koji važi P(a)=0. U tom slučaju kažemo da se polinom anulira u tački x=a. Nula polinoma je *rešenje* ili *koren* algebarske jednačine P(x)=0.

Polinom $P(x) = 2(x-1)^2 x$ ima tri nule i to za $x = 1$ dvostruku i $x = 0$ jednostruku nulu.

Operacije sa polinomoma

- Zbir, razlika i proizvod dva polinoma je polinom.
- **Definicija 5.** Za polinome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

zbir i *proizvod* su redom

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r$$

i

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_s x^s,$$

gde su

$$c_k = a_k + b_k \qquad (0 \le k \le r = \max(n, m))$$

$$\operatorname{dg}(P+Q)(x) \le \max\{\operatorname{dg} P(x), \operatorname{dg} Q(x)\}.$$

i

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \qquad (0 \le k \le s = n + m).$$

$$\operatorname{dg}(PQ)(x) = \operatorname{dg} P(x) + \operatorname{dg} Q(x).$$

- Razlika dva polinoma

$$(P-Q)(x) = P(x) + \big(-Q(x)\big).$$

- Primer. Za polinome

$$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7$$

$$Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$$

$$P(x)+Q(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6x - 7) + (4x^3 - 2x^2 + 12x + 3)$$

$$= 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7 + 4x^3 - 2x^2 + 12x + \boxed{= 7x^3 - 6x^2 + 18x - 4}$$

$$P(x)-Q(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6x - 7) - (4x^3 - 2x^2 + 12x + 3) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7 - 4x^3 + 2x^2 - 12x - 3$$

$$= \boxed{-x^3 - 2x^2 - 6x - 10}$$

Primer

- Za polinome $P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5 \quad \text{i} \quad Q_2(x) = 5x^2 - 7x + 6$
- Zbir i razlika su

$$P_3(x) + Q_2(x) = (3x^3 - 4x^2 + x - 5) + (5x^2 - 7x + 6) = 3x^3 + x^2 - 6x + 1,$$
$$P_3(x) - Q_2(x) = (3x^3 - 4x^2 + x - 5) - (5x^2 - 7x + 6) = 3x^3 - 9x^2 + 8x - 11.$$

- proizvod ovih polinoma je polinom

$$\begin{aligned} T_5(x) &= P_3(x) \cdot Q_2(x) = (3x^3 - 4x^2 + x - 5) \cdot (5x^2 - 7x + 6) = \\ &= 3 \cdot 5x^5 + (3 \cdot (-7) + (-4) \cdot 5)x^4 + (3 \cdot 6 + (-4) \cdot (-7) + 1 \\ &\quad \cdot 5)x^3 + \\ &+ ((-4) \cdot 6 + 1 \cdot (-7) + (-5) \cdot 5)x^2 + (1 \cdot 6 + (-5) \cdot (-7))x \\ &\quad + (-5) \cdot 6 = \\ &= 15x^5 - 41x^4 - 5x^3 - 56x^2 + 41x - 30. \end{aligned}$$

Deljivost polinoma

- Za razliku od operacija sabiranja, oduzimanja i množenja polinoma, operacija deljenja polinoma nije zatvorena u skupu svih polinoma, tj. deljenjem dva polinoma ne dobija se uvek polinom.
- Deljenjem dva polinoma, pored količnika u opštem slučaju može se javiti i ostatak.
- **Primer**

$$
\begin{array}{llllll}
(& 3x^3 & -4x^2 & +2x & -1 &) : (x^2-2x+3) = 3x+2 \\
 & 3x^3 & -6x^2 & +9x & & \\
\hline
 & & 2x^2 & -7x & -1 & \\
 & & 2x^2 & -4x & +6 & \\
\hline
 & & & -3x & -7 &
\end{array}
$$

Deljivost polinoma

Stav. Za proizvoljne nenula polinome $P(x)$ i $S(x)$ postoje jedinstveni polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ takvi da važe:

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x). \qquad (2)$$

gde je $R(x)$ ili nula polinom ili je stepena nižeg od stepena polinoma $S(x)$. Jedinstveni polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ za koje važi (2) nazivaju se tim redom *količnik* i *ostatak* pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $S(x)$.

Primer. U prethodnom primeru je $Q(x) = 3x + 2$, dok je $R(x) = -3x - 7$.

U slučaju da je $R(x) = 0$, tj. da važi:

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x)$$

kažemo da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $S(x)$ ili da se polinom $S(x)$ sadrži u polinomu $P(x)$. To označavamo sa $S \mid P$.

Osnovna teorema algebre i njene posledice

- **Teorema.** Svaki polinom stepena *n* ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva.

- **Bezuov stav**:

Ostatak pri deljenju polinoma P(x) sa (x-a) jednak je P(a), to jest vrednosti

polinoma P(x) u tački x = a. Ako je P(a)=0, deljenje je bez ostatka.

- **Stav.** **Svaki polinom $n-$tog stepena može se napisati u obliku**

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$$

gde su $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ koreni polinoma i a_n koeficijenat uz z^n.

- **Definicija .**

Ako je polinom P deljiv polinomom $Q(z)=(z-a)^k$, a nije deljiv polinomom

$S(z)=(z-a)^{k+1}$, kažemo da je a <u>nula reda k</u> polinoma P.

Kanoničko razlaganje na faktore

- Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ među sobom različite nule polinoma P(x) stepena *n* sa redom višestrukosti $k_1, k_2, \ldots, k_m$, respektivno. Tada važi faktorizacija

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m},$$

gde je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, *a* a_n *je najstariji koeficijent polinoma* $P(x)$.

Faktorizacija se naziva kanoničko razlaganje polinoma $P(x)$ na faktore.

Kanoničko razlaganjeje jedinstveno.

- **Stav.**

Polinom P stepena n ne može se anulirati za više od n različitih vrednosti

- **Stav.**

Ako je kompleksan broj α nula realnog polinoma, tada je i $\overline{\alpha}$ nula tog polinoma.

Vietove formule

One predstavljaju vezu izmedju koeficijenta i nula polinoma. Pomoću njih se često mogu rešavati jednačine $P(x)=0$. Neka je dat polinom :

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

I neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ koreni (nule, rešenja) date jednačine, tada je:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_o}{a_n}$$

Hornerova šema

- Hornerova šema je postupak za jedinstveno određivanje količnika i ostatka pri deobi polinoma P(z) polinomom (z-z_0)

$$P(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0) + P(z_0)$$

Hornerova šema:

z_0	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	b_0	$P(z_0)$

$b_{n-1} = a_n,$

$b_{n-2} = b_{n-1} \cdot z_0 + a_{n-1},$

$b_{n-3} = b_{n-2} \cdot z_0 + a_{n-2},$

...

$P(z_0) = b_0 \cdot z_0 + a_0$.

Hornerova šema

Hornerova šema:

$$
\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c}
z_0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 & P(z_0)
\end{array}
.
$$

$$
\begin{aligned}
&b_{n-1} = a_n, \\
&b_{n-2} = b_{n-1} \cdot z_0 + a_{n-1}, \\
&b_{n-3} = b_{n-2} \cdot z_0 + a_{n-2}, \\
&\ldots \\
&P(z_0) = b_0 \cdot z_0 + a_0 \ .
\end{aligned}
$$