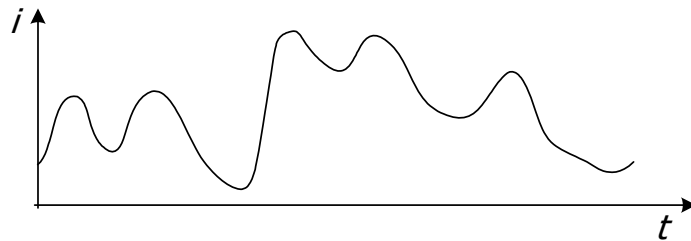


IV VREMENSKI PROMENLJIVE PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE

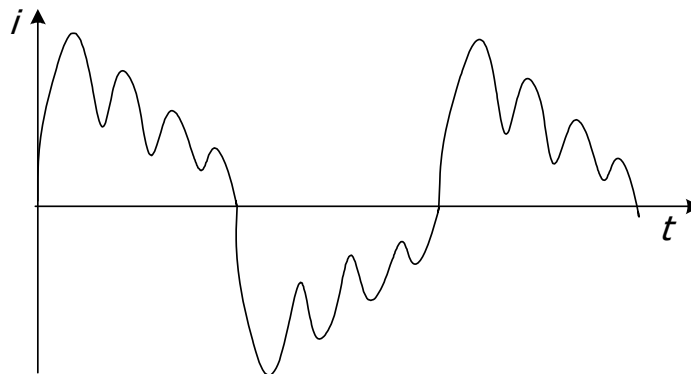
IV.1 PROSTOPERIODIČNE STRUJE

TEORIJSKA OSNOVA

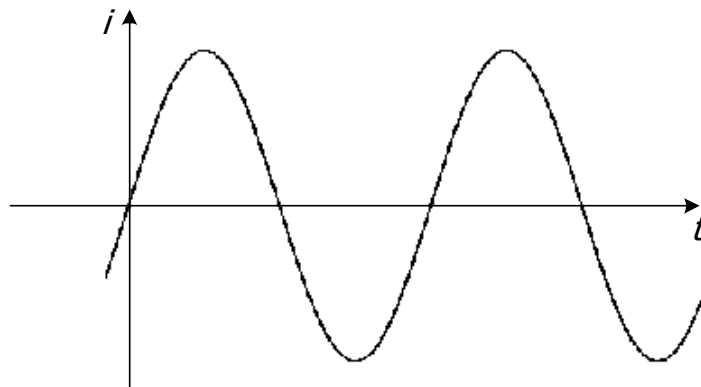
- Vremenski promenljive električne struje u svakom trenutku vremena menjaju intenzitet.



- Naizmenične električne struje su one vremenski promenljive struje koje pored intenziteta povremeno menjaju smer. One mogu biti neperiodične ili periodične, a periodične mogu biti složenoperiodične i prostoperiodične.

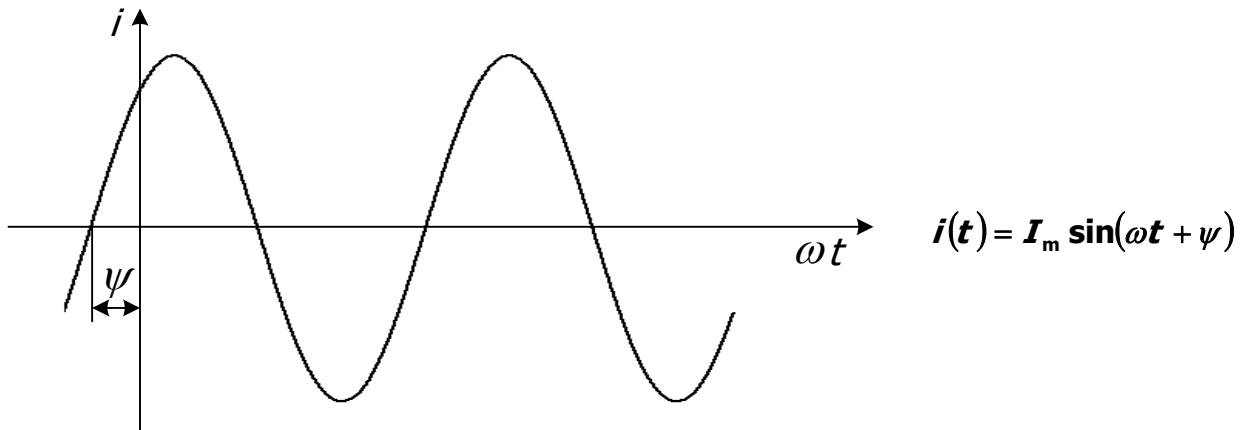


- Mi ćemo proučavati samo prostoperiodične električne struje (struje sinusnog i kosinusnog oblika). Ove struje se koriste u elektrotehnici, jer su samo za njih na svim elementima u kolu (otpornik, kalem, kondenzator), oblici napona i struje isti.



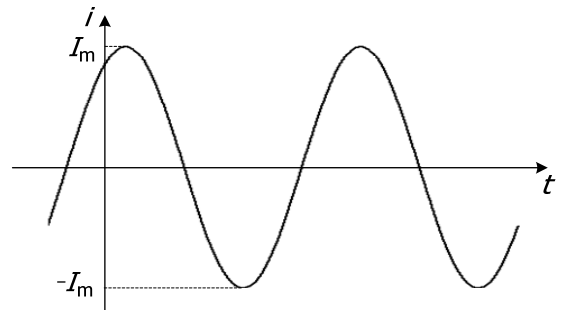
- Grafički prikaz električne struje i napona ima isti oblik u zavisnosti od promene vremena i u zavisnosti od promene faze. Zato se nekad crta grafik $i(t)$, a nekad $i(\omega t)$ ($i(t)$ je u stvari grafik istog oblika kao grafik $i(\omega t)$).

- Šta je trenutna vrednost električne struje i ?
 - Vrednost koju struja ima u nekom trenutku vremena.



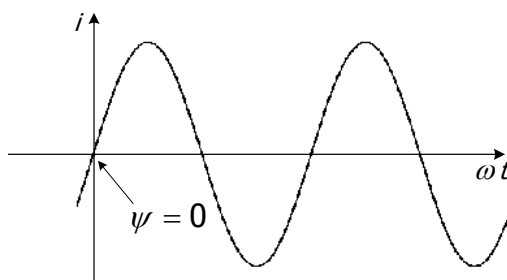
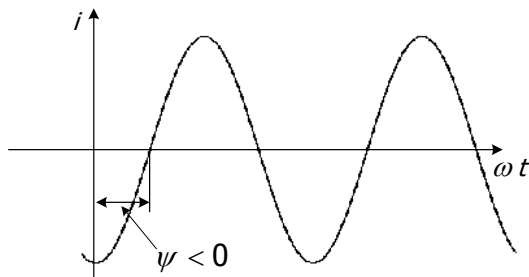
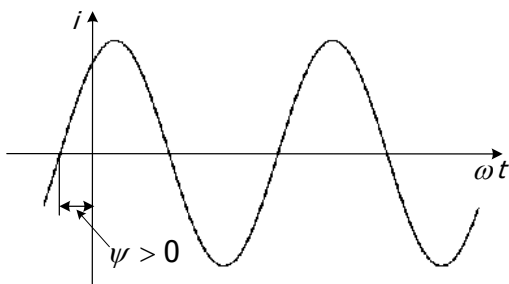
- Šta je amplituda prostoperiodične električne struje I_m ?
 - Maksimalna vrednost koju struja može imati (kada je $\sin(\omega t + \psi) = 1$)

Amplituda je isključivo pozitivna veličina.



- Šta je trenutna faza?
 - Faza koju ima struja u nekom trenutku vremena: $\omega t + \psi$.
- Šta je početna faza ψ ?
 - To je faza (ugao) koju struja ima u početnom trenutku posmatranja.

Početna faza može biti i pozitivna i negativna i jednaka 0.



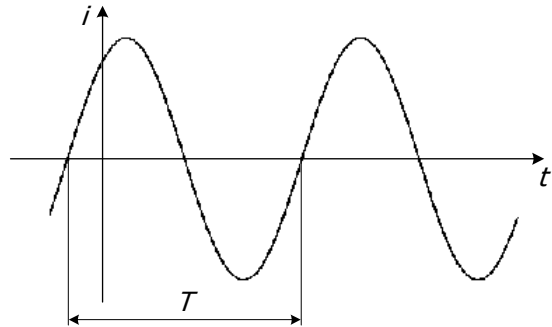
- Šta je kružna učestanost ω ?
 - To je brzina rotacije generatora naizmeničnog (prostoperiodičnog) signala:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \text{ gde je } f - \text{ učestanost (frekvencija) - [Hz]} \\ T - \text{ period oscilacija [s]}$$

- Koja je jedinica za kružnu učestanost?
 - $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ili s^{-1} .
- Šta je period funkcije T ?
 - Vreme za koje se funkcija počne ponavljati na isti način.

- Šta je učestanost (frekvencija) f ?
 - Broj ponavljanja perioda u jednoj sekundi.
 - Učestanost je obrnuto srazmerna periodu:

$$f = \frac{1}{T}.$$



- Koja je jedinica za učestanost?
 - Herc [Hz].
- Šta je srednja vrednost električne struje?

$$I_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

– Srednja vrednost sinusoide je 0, pa je zato i srednja vrednost takvih struja i napona jednaka 0.

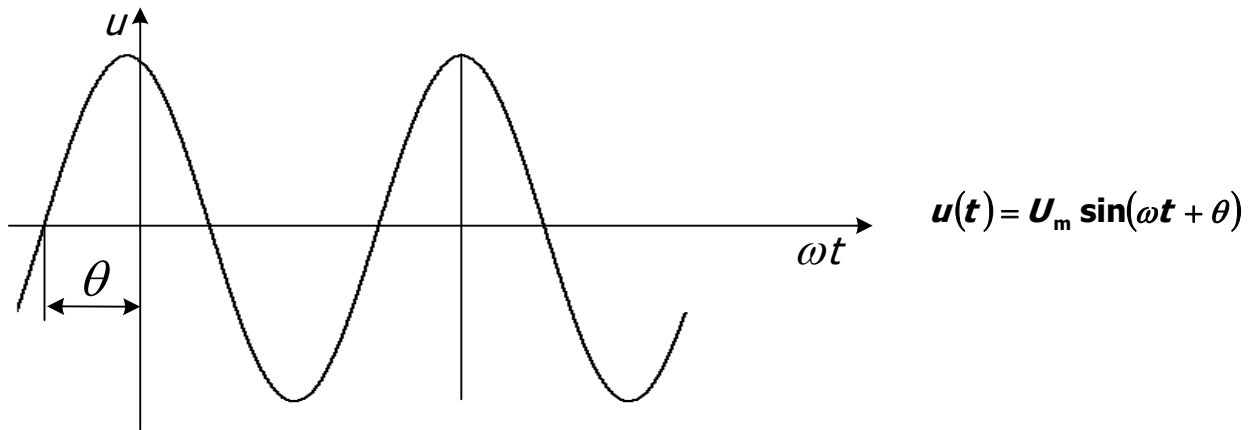
- Šta je efektivna vrednost električne struje?
 - Matematički izraz za srednju kvadratnu vrednost:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

– Efektivna vrednost električne struje sinusnog oblika je:

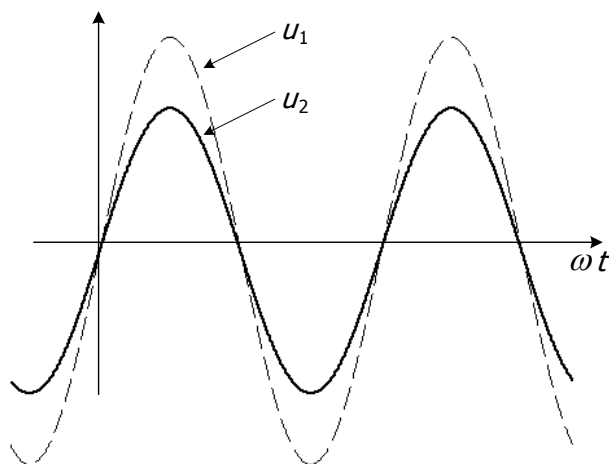
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

- Sve ove definicije važe i za napone.



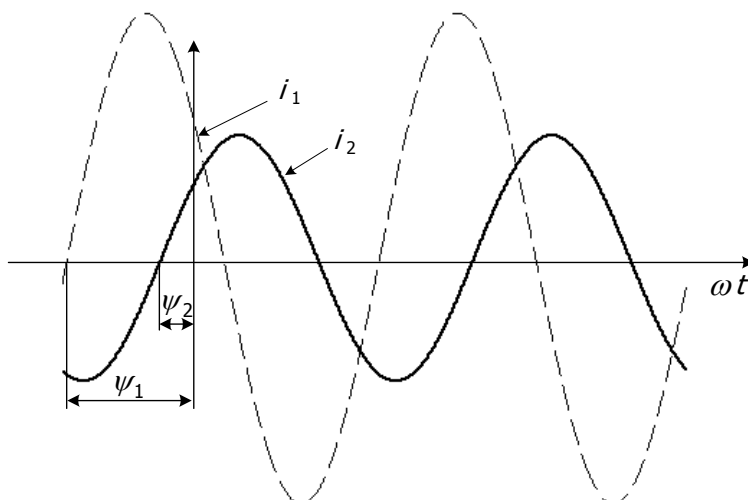
- Električne struje i naponi mogu se porediti po amplitudi i po fazi.

Primer 1:



– Napon u_1 ima veću amplitudu od napona u_2 .

Primer 2:



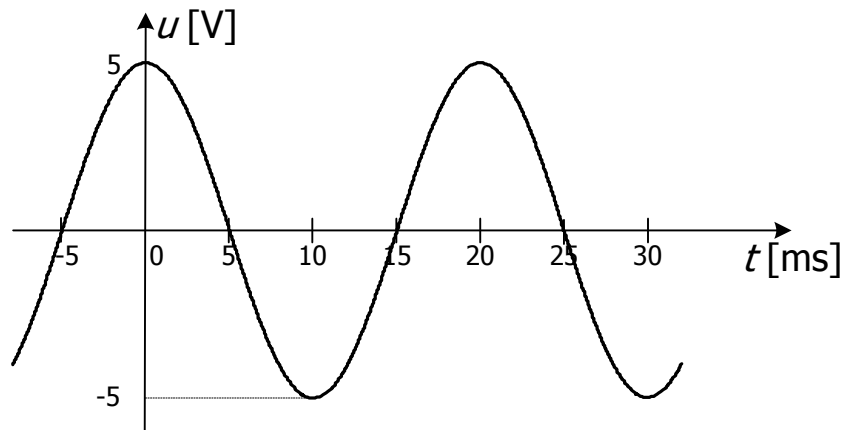
– Fazna razlika između struje i_1 i i_2 je $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$. Važi da je $\psi_1 > \psi_2$, pa je i $\Delta\psi > 0$. Tada kažemo da **struja i_1 fazno prednjači struji i_2 za $\Delta\psi$** , odnosno da **struja i_2 fazno kasni za strujom i_1 za $\Delta\psi$** .

- Za trenutne vrednosti prostoperiodičnih napona i struja važe Omov, I i II Kirhofov zakon.

ZADACI

IV.1.1 Na slici je prikazan grafik zavisnosti vremenske promene napona između dve tačke u jednom kolu.

- Odrediti amplitudu, efektivnu vrednost, početnu fazu, kružnu učestanost i frekvenciju ovog napona.
- Napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost ovog napona.
- Kolika je trenutna vrednost napon u trenutku $t = 10$ ms?



Rešenje:

a) Vremenski periodične veličine su veličine čije se vrednosti ponavljaju u jednakim vremenskim intervalima. Taj vremenski interval naziva se period i obeležava se sa T . Prostoperiodične veličine se menjaju po sinusnom zakonu. Mi ćemo proučavati linearne mreže sa vremenski prostoperiodičnim strujama i naponima. Vrlo je bitno zapamtiti da su **u pojedinoj ovakvoj mreži svi naponi i struje iste frekvencije** (pod pretpostavkom da su svi generatori iste frekvencije, što će biti slučaj u svim našim primerima). Opšti oblik napona koji se menja po prostoperiodičnom zakonu je:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta).$$

↑
amplituda [V]

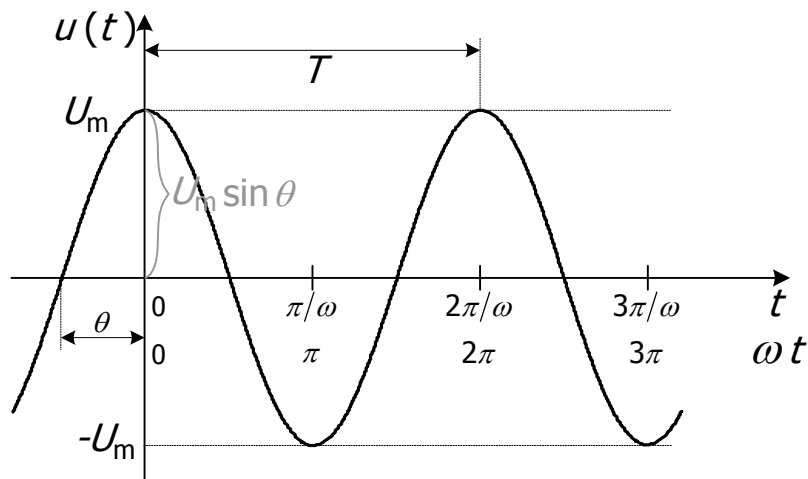
↑
kružna učestanost [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ili s^{-1}]

↑
početna faza [rad]

Na slici IV.1.1.1 obeležene su sve pomenute veličine za analizu datog prostoperiodičnog napona.

Amplituda prostoperiodične veličine je maksimalna apsolutna vrednost koju može imati ta prostoperiodična veličina. Pošto se prostoperiodične veličine menjaju po sinusnom zakonu, čija se vrednost menja između 1 i -1, amplituda je vrednost sa kojom se množi sinusna funkcija, a u slučaju prostoperiodičnog napona to je veličina U_m . Dakle, u opštem slučaju amplitudu obeležavamo velikim slovom koje označava prostoperiodičnu veličinu sa malim slovom m u indeksu. Sa slike IV.1.1.1 vidi se da je amplituda analiziranog napona:

$$U_m = 5 \text{ V}.$$



Slika IV.1.1.1

Efektivna vrednost prostoperiodične veličine je $\sqrt{2}$ puta manja od njene amplitude. Efektivnu vrednost obeležavamo velikim slovom koje označava prostoperiodičnu veličinu, bez indeksa. Dakle, u slučaju prostoperiodičnog napona efektivna vrednost je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Efektivna vrednost analiziranog napona je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,5\sqrt{2} \text{ V} = 3,54 \text{ V}.$$

Na početku smo uveli period prostoperiodične veličine. Kao što se može uočiti na slici IV.1.1.1 vrednosti napona se ponavljaju na svkih 20 ms pa je perioda:

$$T = 20 \text{ ms}.$$

Frekvencija ili **učestanost** predstavlja broj ponavljanja perioda u jednoj sekundi pa je veza između frekvencije i periode:

$$f = \frac{1}{T} [\text{Hz} = \text{s}^{-1}].$$

Vidi se da je jedinica za frekvenciju s^{-1} , ali je ipak uvedena nova jedinica: herc [Hz]. Frekvencija analiziranog napona je:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 50 \text{ Hz}.$$

Sinusna funkcija ne menja vrednost ako se uglu, čiji se sinus određuje, doda konstanta $2\pi n$, gde je n ceo broj. Dakle, za $n = 1$ važi:

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega t + \theta + 2\pi).$$

S obzirom da za periodičnu veličinu mora da važi:

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega(t + T) + \theta) = \sin(\omega t + \omega T + \theta),$$

poređenjem prethodna dva izraza vidimo da je period prostoperiodične veličine određen relacijom:

$$\omega T = 2\pi.$$

Na osnovu prethodnog izraza definiše se **kružna učestanost**:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f .$$

Kružna učestanost analiziranog napona je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

Trenutna faza prostoperiodične veličine je:

$$\omega t + \theta ,$$

a jedinica je radijan.

Početna faza prostoperiodične veličine pokazuje koliko je vremenski pomeren ta veličina u odnosu na vremenski početak i jednaka je trenutnoj fazi za početni trenutak $t = 0$ s. Početna faza se izražava u radijanima i može imati vrednosti od $-\pi$ do π . Početnu fazu napona obeležavamo sa θ . Početnu fazu struje obeležavamo sa ψ . U početnom trenutku $t = 0$ s napon ima vrednost:

$$u(t = 0 \text{ s}) = U_m \sin \theta .$$

U našem zadatku na apscisi (x -osi) se nalazi vreme - t . Pokazali smo da vremenskoj promeni od jedne periode odgovara promena faze od 2π , pa se češće na x -osu nanosi proizvod ωT u radijanima. Na ovaj način je odmah dostupna informacija o početnoj fazi, mada se na grafiku gubi informacija o frekvenciji signala. Na slici IV.1.1.1 prikazana su oba načina obeležavanja x -ose.

Sa slike iz zadatka vidimo da analizirani napon prednjači u odnosu na vremenski početak za 5 ms. Kažemo da "prednjači" jer se najbliži početak sinusoide početnom trenutku $t = 0$ s nalazi pre početnog trenutka (nalazi se sa leve strane). Da bismo dobili početnu fazu, kao što se vidi sa slike IV.1.1.1, ovu vrednost treba pomnožiti sa kružnom učestanošću. Dakle, početna faza analiziranog napona je:

$$\theta = \omega \cdot \Delta t = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 0,5\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 1,57 \text{ rad} .$$

(U sledećem zadatku srešćemo sa sa strujom koja ima negativnu početnu fazu.)

b) S obzirom da smo odredili sve potrebne veličine možemo napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost ovog napona:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 5 \sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V} .$$

c) Da bismo dobili trenutnu vrednost napona u trenutku $t = 10$ ms, zamenimo ovu vrednost u prethodno dobijenom izrazu:

$$u(t = 10 \cdot 10^{-3} \text{ s}) = 5 \sin\left(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ s} + 1,57 \text{ rad}\right) \text{ V} = 5 \sin(4,71 \text{ rad}) \text{ V} = -5 \text{ V}$$

što se može proveriti na grafiku zadatom u zadatku.

IV.1.2 Trenutna vrednost struje u jednoj grani kola menja se po zakonu:

$$i(t) = 0,1 \sin\left(10^4 t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}.$$

a) Nacrati grafik zavisnosti vremenske promene ove struje.

b) Na istom grafiku nacrtati promene struje $i_1(t)$, koja prednjači struji $i(t)$ za $\frac{\pi}{2}$.

c) Na istom grafiku nacrtati promene struje $i_2(t)$, koja kasni za strujom $i(t)$ za $\frac{\pi}{3}$.

Rešenje:

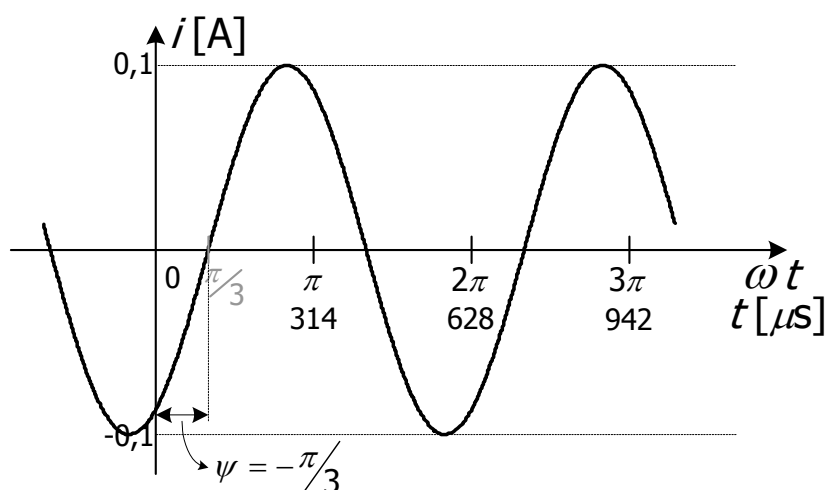
a) Napišimo opšti izraz po kome se menja trenutna vrednost prostoperiodične struje:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 0,1 \sin\left(10^4 t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}.$$

Odavde određujemo parametre:

- amplituda $I_m = 0,1 \text{ A}$,
- kružna učestanost $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$,
- frekvencija $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^4 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 1592 \text{ Hz}$,
- period $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10^4 \text{ s}^{-1}} = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 628 \text{ } \mu\text{s}$,
- početna faza $\psi = -\frac{\pi}{3}$.

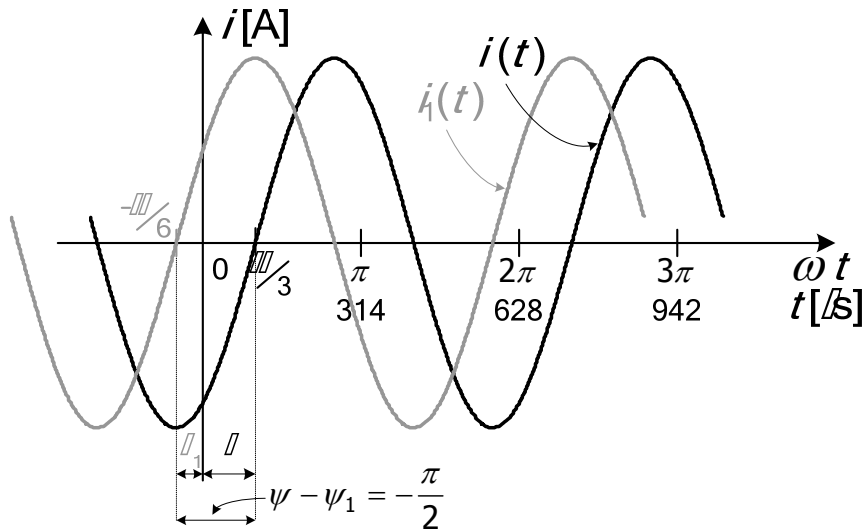
Uočimo da je početna faza struje negativna, što znači da struja kasni u odnosu na vremenski početak, odnosno da se najbliži početak sinusoide početnom trenutku $t = 0 \text{ s}$ nalazi posle početnog trenutka (nalazi se sa desne strane). Imajući ovo u vidu i s obzirom da smo odredili parametre, možemo nacrtati grafik zavisnosti trenutne vrednosti analizirane struje:



Slika IV.1.2.1

b) Struja koja prednjači za $\frac{\pi}{2}$ u odnosu na posmatranu struju ima najbliži početak sinusoide početku sinusoide $i(t)$ koji prednjači u vremenu, odnosno po ωt osi pomeren nalevo za $\frac{\pi}{2}$, kao što je prikazano na slici IV.1.2.2. Dakle, početna faza struje $i_1(t)$ je:

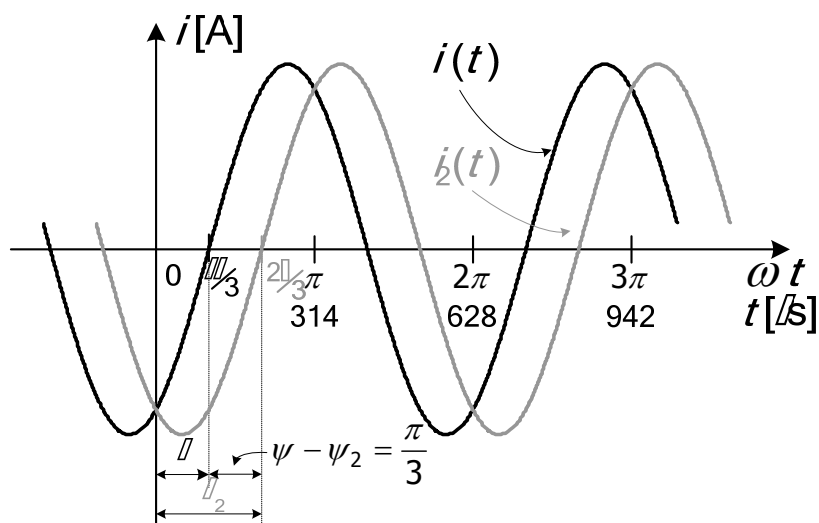
$$\psi_1 = \psi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$



Slika IV.1.2.2

c) Struja koja kasni za $\frac{\pi}{3}$ u odnosu na posmatranu struju ima najbliži početak sinusoide početku sinusoide $i(t)$ zakašnjen u vremenu, odnosno po ωt osi pomeren nadesno za $\frac{\pi}{3}$, kao što je prikazano na slici IV.1.2.3. Dakle, početna faza struje $i_2(t)$ je:

$$\psi_2 = \psi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

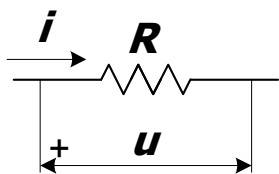


Slika IV.1.2.3

IV.1.1 OTPORNIK U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE

TEORIJSKA OSNOVA

- Napon na krajevima otpornika i električna struja koja protiče kroz njega povezani su Ohmovim zakonom:



$$u = R \cdot i$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$u = R \cdot i = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

Iz gornje jednačine vidimo da je amplituda napona:

$$U_m = R \cdot I_m,$$

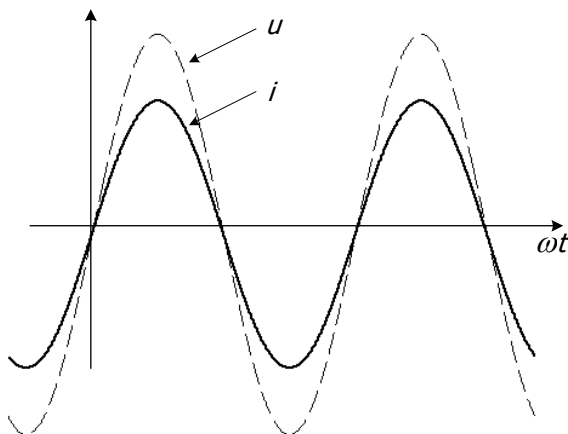
a početna faza napona jednaka je početnoj fazi struje:

$$\theta = \psi.$$

- Kako se fazno porede naponi i struje?
 - Uvodi se fazna razlika napona i struje φ . To je razlika početnih faza napona i struje:

$$\varphi = \theta - \psi.$$

- Kod otpornika je $\varphi = 0$, što znači da su **kod otpornika napon i struja u fazi**.



- Šta je R ?
 - Aktivna otpornost otpornika (rezistansa)**. Može biti isključivo pozitivna veličina.

ZADACI

IV.1.1.1 U otporniku otpornosti $R = 1 \text{ k}\Omega$ uspostavljena je prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 10 \text{ mA}$, učestanosti $f = 200 \text{ Hz}$ i početne faze $\psi = \frac{\pi}{8}$.

- Napisati izraz po kome se menja trenutna vrednost struje kroz otpornik.
- Odrediti napon između krajeva otpornika.
- Nacrtati na istom grafiku promene trenutnih vrednosti napona i struje kroz otpornik.

Rešenje:

a) Opšti izraz po kome se menja trenutna vrednost struje je:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Na osnovu poznate efektivne vrednosti određujemo amplitudu struje:

$$I_m = I\sqrt{2} = 10 \text{ mA} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ mA} = 14,1 \text{ mA}.$$

Kružna učestanost struje je:

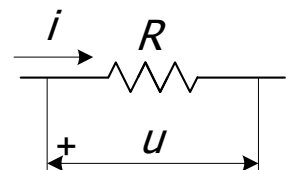
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200 \text{ Hz} = 400\pi \text{ s}^{-1} = 1256 \text{ s}^{-1}.$$

Zamenjujući određene parametre u izrazu za struju dobijamo:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 14,1 \sin\left(1256 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right) \text{ mA}$$

b) Trenutne vrednosti napona i struje na otporniku povezane su Omovim zakonom, prema usaglašenim referentnim smerovima, kao to je prikazano na slici IV.1.1.1.1:

$$u(t) = R \cdot i(t).$$



Slika IV.1.1.1.1

Na osnovu toga trenutna vrednost napona na otporniku menja se po zakonu:

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \theta).$$

Poredeći levu i desnu stranu ove jednakosti zaključujemo da su **kod otpornika napon i struja u fazi**, odnosno da je:

$$\theta = \psi,$$

i fazna razlika napona i struje jednaka je nuli:

$$\varphi = \theta - \psi = 0.$$

kao i da je amplituda napona na otporniku jednaka proizvodu otpornosti otpornika i amplitude struje:

$$U_m = R \cdot I_m.$$

Zamenimo brojne vrednosti u izrazu:

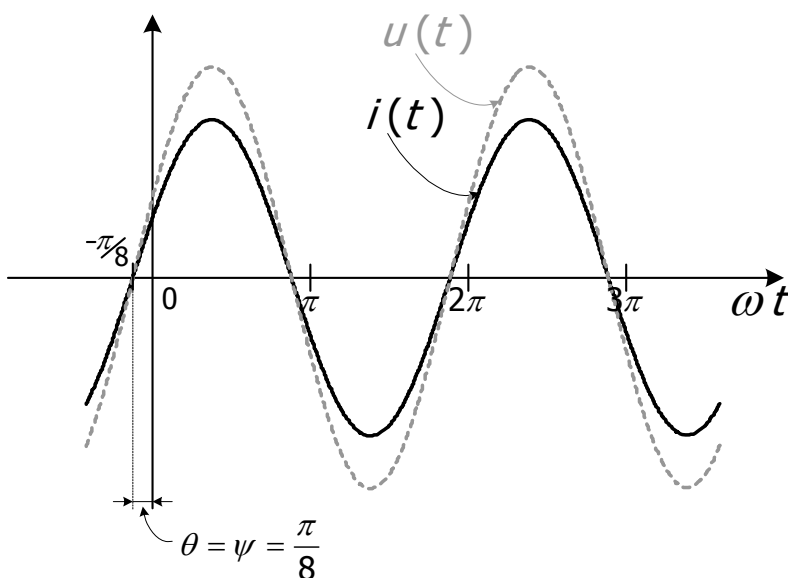
$$U_m = R \cdot I_m = 1 \cdot 10^3 \Omega \cdot 14,1 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 14,1 \text{ V}.$$

Naravno, napon i struja su iste učestanosti.

Izraz po kom se menja trenutna vrednost napona na posmatranom otporniku je:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) = 14,1 \sin\left(1256 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right) \text{ V}.$$

c) Na slici IV.1.1.1.2 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje na otporniku. Ove dve veličine su, naravno, fizički potpuno različite, ali su nacrtane na istom grafiku da bi se uočila njihova fazna razlika (koja je jednaka nuli u slučaju otpornika). Dakle, "prividan" odnos njihovih amplituda na grafiku je proizvoljan, proizvoljno je nacrtana amplituda napona veća od napona struje. Amplituda pojedine veličine se crta prema vrednostima na ordinati (y -osi), posebno određenim za svaku od veličina (a koje zbog jednostavnosti grafika nisu prikazane).



Slika IV.1.1.1.2

IV.1.1.2 Napon na otporniku otpornosti $R = 5 \Omega$ menja se po zakonu $u(t) = 5 \sin(300t - \frac{\pi}{4}) \text{ V}$.

- Odrediti zakon po kom se menja struja kroz otpornik.
- Koliko iznose efektivne vrednosti struje i napona na otporniku.
- Nacrtati na istom grafiku promene trenutnih vrednosti napona i struje kroz otpornik.

Rešenje:

a) Prema Omovom zakonu je:

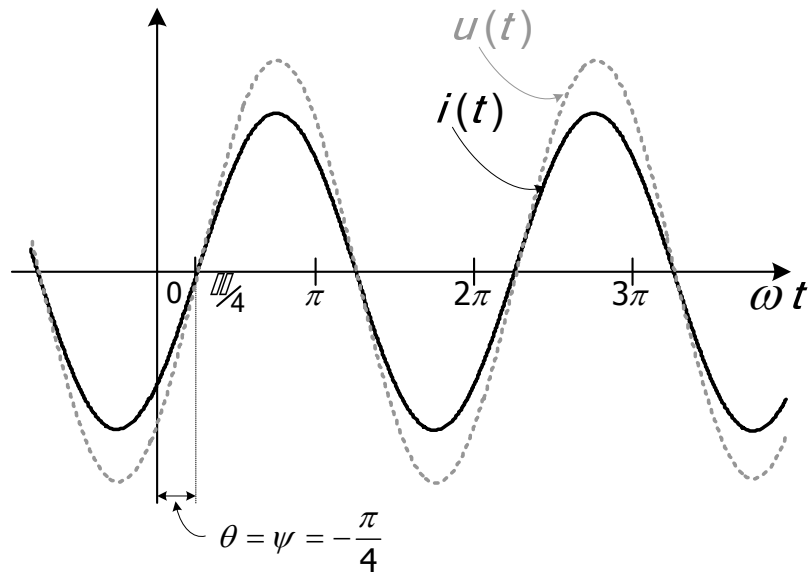
$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \theta) = \frac{5 \text{ V}}{5 \Omega} \sin\left(300t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \cdot \sin\left(300t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ A} = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

b) Efektivna vrednost neke prostoperiodične veličine je $\sqrt{2}$ puta manja od njene amplitude pa su efektivne vrednosti napona i struje:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,5\sqrt{2} \text{ V} = 3,5 \text{ V},$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{2} \text{ A} = 0,7 \text{ A} .$$

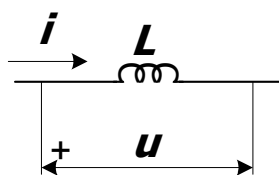
c) Na slici IV.1.1.2.1 prikazani su grafici promene trenutnih vrednosti napona i struje na otporniku.



Slika IV.1.1.2.1

IV.1.2 KALEM U KOLU PROSTOPERIODIČNE ELEKTRIČNE STRUJE TEORIJSKA OSNOVA

- Napon na krajevima kalema i električna struja koja protiče kroz njega povezani su određenom zakonitošću:



$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_m \cos(\omega t + \psi) = \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

Iz gornje jednačine vidimo da je amplituda napona:

$$U_m = \omega L \cdot I_m,$$

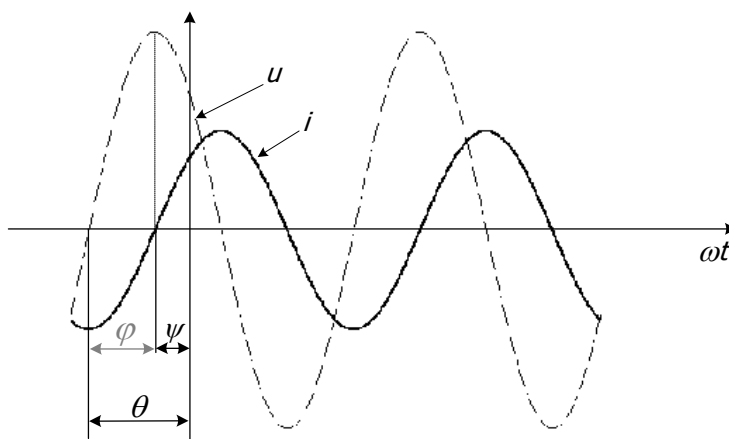
a početna faza napona:

$$\theta = \psi + \frac{\pi}{2}.$$

- Kakva je razlika faza napona na kalemu i struje kroz njega?

$$\varphi = \theta - \psi = \psi + \frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\pi}{2}$$

Kaže se da **napon na kalemu fazno prednjači struji za $\frac{\pi}{2}$** .



- Šta je ωL ?
 - Količnik amplitude napona U_m i amplitude struje I_m je proizvod ωL . To je po dimenzijama otpornost ($U_m/I_m = \text{otpornost}$). Ali to nije termogena otpornost (ne pretvara se električna energija u toplotnu kao kod otpornika). Zato se ova otpornost zove **reaktivna otpornost (reaktansa) kalema**:

$$X_L = \omega L.$$

- Koja je jedinica za reaktivnu otpornost kalema?
 - Om [Ω]
- Kako koristimo kalem u kolu s obzirom na njegovu reaktivnu otpornost?
 - Izborom induktivnosti kalema, a u zavisnosti od učestanosti na kojoj kolo radi, možemo određivati električne struje u granama kola.
 - Kalem je propusnik niskih učestanosti.