# Visoka tehnička škola Niš

**Studijski program:** Komunikacione tehnologije

## Predmet: Elektronska merna instrumentacija - EMI

Prof. dr Zoran Veličković, dipl. inž. el.

2019/2020.

Prof. dr Zoran Veličković, dipl. inž. el.

# Elektronska merna instrumentacija

## Osnove računa grešaka - statistička obrada rezultata merenja

(3)

# Sadržaj

# Greške merenja

- **RAZLIKA** između dobijenog **REZULTATA MERENJA** i **TAČNE VREDNOSTI** merene veličine naziva se **GREŠKA MERENJA**.
- Definicija greške u odnosu na pravu (tačnu) vrednost veličine koja se meri ima samo **TEORIJSKI ZNAČAJ**, jer se njena vrednost **NE MOŽE ODREDITI** (Zašto? ) (nije poznata tačna vrednost!).
- Šta vi mislite: Kome je poznata tačna vrednost merene veličine?
- Budite uvek **KRITIČNI** (podozrivi) prema dobijenim rezultatima merenja (naročito za merenja koja ste **VI** obavili)!
- **ANALIZIRAJTE** moguće **IZVORE GREŠAKA** merenja kako bi ih sveli na najmanju meru.
- Za potrebe **ANALIZE DOBIJENIH REZULTATA MERENJA** razvijena je posebna grana nauke koja se naziva **TEORIJA ili RAČUN GREŠAKA**.

# Klasifikacija grešaka merenja

- Prema izvoru nastajanja, greške se mogu svrstati u **TRI** osnovne grupe:
  - **GRUBE** greške,
  - **SISTEMATSKE** greške i
  - **SLUČAJNE** greške.
- **GRUBE GREŠKE** su izrazito uočljive, a uzrokovane su:
  - **NESTRUČNOŠĆU** ili **NEPAŽNJOM** operatera,
  - **NEPODEŠENIM** instrumenatom,
  - **NEADEKVATNOM** UPOTREBOM ili **POGREŠNIM** izračunavanjem.
- Dok postoji **LJUDSKI FAKTOR** biće i ovog tipa grešaka!
- Osnovni preduslovi da se izbegnu **GRUBE GREŠKE** su dobro poznavanje:
  - **OSOBINA** objekta merenja,
  - **MOGUĆNOSTI** i **KARAKTERISTIKE** mernih sredstava kao i
  - **USLOVA** merenja.

Operateri merenja

# Račun grešaka merenja (1)

- **TEORIJSKA ANALIZA GREŠAKA** merenja omogućava da se:
  - **PREDVIDE** uzroci nastajanja,
  - **UTVRDI** priroda ponašanja,
  - **ODABERU** i **PRIMENE** adekvatne metode i postupci za njihovu procenu i iznađu mogućnosti za njihovo smanjenje.
- Ako se **PRAVA VREDNOST** merene veličine označi sa **X**, a rezultat merenja sa **A**, onda njihova razlika, data u jedinicama merene veličine, predstavlja **APSOLUTNU GREŠKU MERENJA**, **ΔX**, iskazanu relacijom:

$$\Delta X = |X - A| = \begin{cases} X - A, & X > A \\ A - X, & X < A \end{cases}$$

- Iz ove relacije sledi da **SE VREDNOST MERENE VELIČINE** u trenutku merenja može dobiti iz zraza $X_{1,2} = A \pm \Delta X$ odakle se **NE MOŽE ZNATI** koja je od dve merene veličine ($X_1$ ili $X_2$) njena prava vrednosti!

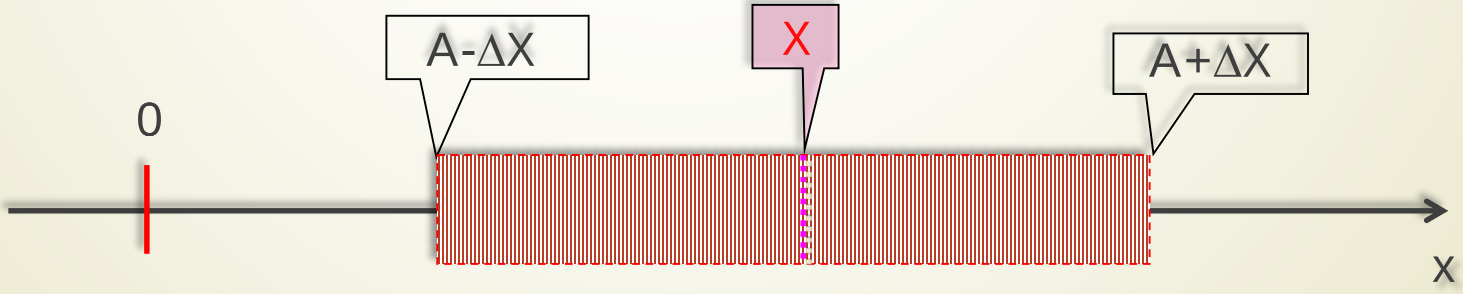
# Apsolutna greška

- Za datu apsolutnu grešku, **PRAVA VREDNOST** merene veličine (zbog nejednoznačnosti greške) je data **INTERVALOM MOGUĆIH VREDNOSTI**.
- **INTERVAL MOGUĆIH VREDNOSTI** se matematički može izraziti u obliku:

$$X = (A - \Delta X, A + \Delta X)$$

$$A - \Delta X < X < A + \Delta X$$

- Za dobijenu vrednost rezultata merenja A i datu apsolutne greške ΔX, prava vrednost X može biti biti **BILO KOJA** od brojnih vrednosti na **INTERVALU SKUPA VREDNOSTI** $X=[x_i]$, i=1,2,3,...,n, koji je osenčan.



# Relativna greška

- Umesto **APSOLUTNE GREŠKE** merenja $\Delta X$ (bilo sistematskog ili slučajnog karaktera), koristi se pojam **RELATIVNE GREŠKE** merenja $\delta_X$ i definiše se kao **PROCENTUALNI ODNOS** apsolutne greške $\Delta x$ i prave vrednosti merene veličine X :

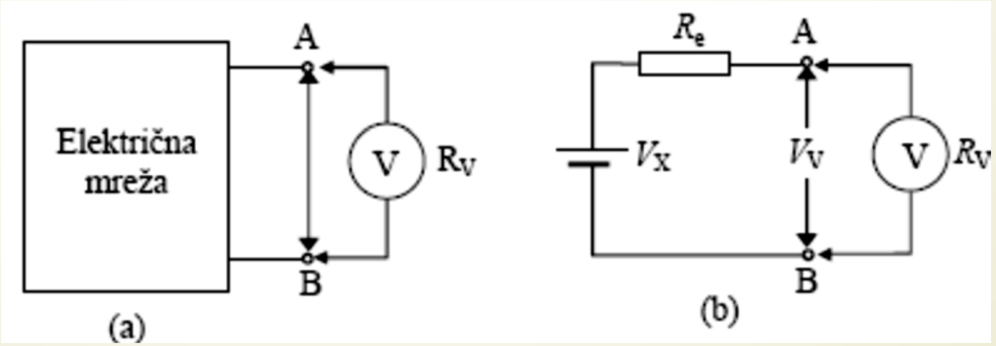
$$\delta_x = \frac{\Delta X}{X} 100 \ [\%]$$

- Znak relativne greške $\delta_X$ je određen **ZNAKOM APSOLUTNE GREŠKE.**
- U praktičnim primenama, u relaciji za relativnu grešku, prava vrednost X se može zameniti:
  - Izmerenom,
  - Procenjenom ili
  - Propisanom (normiranom)

  vrednošću merene veličine ili veličinom mere.

# Nedostaci apsolutne greške

- **RELATIVNA GREŠKA** merenja daje **PRAVU PREDSTAVU** o **NIVOU TAČNOSTI** izmerene veličine.
- **Primer** 1: Ako je apsolutna greška merenja napona 5 mV -> pri mernju napona 10 mV, onda je RELATIVNA GREŠKA VRLO VELIKA, pri merenju napona od 10 V relativna greška bila znatno manja 0,5%!
- **Prmer** 2: Kako otpornost voltmetra Rv, kojim se meri napon VV u električnom kolu u tačkama A i B, kao na slici (a), svojim prisustvom remeti radni režim tog kola?
- Kolika je zbog toga greška merenja napona VV pod uticajem otpornosti voltmetra RV?



# Izvedena greška merenja

- **IZVEDENA GREŠKA MERENJA** određuje se tako, što se u izrazu za relativnu grešku $\delta_X$ , **PRAVA VREDNOST** merene veličine zamenjuje (prema izvesnim kriterijumima) sa **PROPISANOM VREDNOŠĆU** $X_n$.
- Izvedena greška služi za **KLASIFIKACIJU MERNIH SREDSTAVA** sa različitim opsezima merenja prema tačnosti, tako da se često koristi za određivanje tačnosti rezultata merenja.
- Ako se u izrazu za $\delta_X$ koristi **PROPISANA** (normirana) vrednost, onda se na taj način određuje **KLASA TAČNOSTI INSTRUMENATA**.
- **PROPISANE** (normirane) vrednosti $X_n$ date su kao podaci na samoj meri - na indikatoru mernog instrumenta ili u priloženoj dokumentaciji merila.
- **KLASA TAČNOSTI** je propisana **METROLOŠKA KARAKTERISTIKA** mernih instrumenata.

# Klasa tačnosti instrumenta

- **KLASA TAČNOSTI** je dozvoljena **IZVEDENA RELATIVNA GREŠKA MERENJA INSTRUMENTA**, dobijena **OVEROM** tih mernih instrumenata sa odgovarajućim mernim standardima.
- **OVERA INSTRUMENATA** je postupak **UPOREĐIVANJA PO TAČNOSTI** ispitivanog instrumenta sa referentnim instrumentom.

- **KLASA TAČNOSTI** p je definisana u odnosu na **GRANIČNE VREDNOSTI** (više granice) apsolutne greške MERNOG OPSEGA INSTRUMENTA, iskazana relacijom:

$$p = \frac{\Delta X_{max}}{X_{gr}} 100\ [\%]$$

  - $\Delta X_{max}$ – **MAKSIMALNA APSOLUTNA GREŠKa** pri overi instrumenta,
  - $X_{gr}$ - PROPISANA VREDNOST kao gornja vrednost mernog opsega.

# Standardne klase instrumenata

- Vrednosti klasa tačnosti instrumenata su obično označene konvencionalno prihvaćenim **BROJEVIMA** ili **SIMBOLIMA** pod nazivom **OZNAKE KLASA**.

- Oznake klasa za **ELEKTRIČNE POKAZNE INSTRUMENTE** predstavljene su nizom brojeva:

A=[0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5 ; 5].

- Iz definiciong obrasca za relativnu grešku proističe da je:
  - Relativna greška je **OBRNUTO PROPORCIONALNA VREDNOSTI MERENE VELIČINE**!
- Zato je u praksi preporučljivo da se kod instrumenata sa analognom skalom rezultat merenja očitava u **GORNJOJ TREĆINI SKALE** mernog opsega.

# Primer: Voltmetar klase tačnosti 1

- Voltmetar klase tačnosti 1 ima skalu od $X_{gr}$ = 150 V. Pri merenju nekog napona voltmetar je pokazao 83 V. Odredi maksimalnu relativnu grešku pri ovom pokazivanju voltmetra.
  - Prema definiciji maksimalna apsolutna greška (dakle na opsegu od 150 V) je:

$$\Delta X_{max} = \frac{p \cdot X_{gr}}{100} = \frac{\pm 1 \cdot 150}{100} = \pm 1.5\ V$$

  - Tako je maksimalna relativna greška pri pokazivanju od 83 V:

$$p = \frac{\Delta X_{max}}{X} \cdot 100 = \frac{\pm 1.5\ V}{83\ V} \cdot 100 = \pm 1.814\%$$

# Primer: Voltmetar klase tačnosti 1, nastavak

- Iz ovog primera se vidi da voltmetar pri punom skretanju (150 V) ima garantovanu graničnu relativnu grešku od **±1%**.
- Pri pokazivanju napona od 83V, relativna greška se POVEĆAVA na ± 1.814%!
- Ovo znači da će merenje još manjih napona na ovoj skali imati još VEĆU relativnu grešku!
  - Pri merenju napona od 60V relativna greška je ± **2.5%!**
  - Pri merenju napona od 30V relativna greška je **± 5%!**
- Ovo je posledice činjenice da je maksimalna apsolutna greška instrumenta konstanta.
- Evo praktične potrebe za očitavanjem instrumenta u **POSLEDNJOJ TREĆINI SKALE**.

# Domaći

- Voltmetar sa pokretnim kalemom i mernim opsegom od 150V, pokazao je pri referentnim uslovima: 10V, 20V, ..., 150V, dok je tačna vrednost merenog napona iznosila: 10.0, 20.1, 30.1, 40.2, 50.1, 60.0, 69.9, 79.8, 89.7, 99.9, 110.0, 120.2, 130.1, 140.1 i 150V.
- Kojoj klasi tačnosti pripada ovaj voltmetar?

- Odgovor: Instrument je klase 0.2.
- Pogledajte rešenje na sledećem slajdu.

# Domaći, rešenje

- KLASA TAČNOSTI p je definisana u odnosu na granične vrednosti apsolutne greške mernog opsega instrumenta.

$$p = \frac{\Delta X_{max}}{X} \cdot 100$$

$$X_{gr} = 150\,V$$

| Redni broj | Izmereni napon [v] | Tačan napon [v] | Apsolutna greška [v] | Granična greška[%] |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | 10 | 10.0 | 0.0 | 0.0 |
| **2.** | 20 | 20.1 | 0.1 | 0.067 |
| **3.** | 30 | 30.1 | 0.1 | 0.067 |
| **4.** | 40 | 40.2 | 0.2 | 0.13 |
| **5.** | 50 | 50.1 | 0.1 | 0.067 |
| **6.** | 60 | 60.0 | 0.0 | 0.0 |
| **7.** | 70 | 69.9 | 0.1 | 0.067 |
| **8.** | 80 | 79.8 | 0.2 | 0.13 |
| **9.** | 90 | 89.7 | 0.3 | 0.2 |
| **10.** | 100 | 99.9 | 0.1 | 0.067 |
| **11.** | 110 | 110.0 | 0.0 | 0.0 |
| **12.** | 120 | 120.2 | 0.2 | 0.13 |
| **13.** | 130 | 130.1 | 0.1 | 0.067 |
| **14.** | 140 | 140.1 | 0.1 | 0.067 |
| **15.** | 150 | 150.0 | 0.0 | 0.0 |

# Slučajne greške i rezultat merenja (1)

- **SLUČAJNE GREŠKE** kod merenja se mogu uočiti samo kod **PONOVLJENOG NIZA MERENJA JEDNE ISTE** veličine sa istim sredstvima merenja i u potpuno **JEDNAKIM USLOVIMA.**
- Niz **PONOVLJENIH REZULTATA** merenja ispoljava **SLUČAJNI KARAKTER** - pojedinačni rezultati merenja se **MAKAR I MALO** međusobno razlikuju!
- Rezultati merenja predstavljaju posebnu vrstu **SLUČAJNIH VELIČINA** sa svim svojim specifičnostima i karakteristikama!
- U obradi višestruko ponovljenih rezultata merenja kao slučajnih veličina polazi se od analize osobina **VEROVATNOĆE NJIHOVOG POJAVLJIVANJA.**
- **REZULTATI MERENJA** su posebna vrsta **SLUČAJNIH VELIČINA**, čiji se parametri mogu **PROCENJIVATI** zakonima **TEORIJE VEROVATNOĆE i MATEMATIČKE STATISTIKE.**

# Pojmovi matemetičke statistike

- U nastavku su date definicije često korišćenih pojmova iz matematičke statistike primenjenih na obradu rezultata merenja:
  - **POPULACIJA** X je NEOGRANIČENI NIZ svih mogućih vrednosti, xi, slučajne veličine, x, $X=\{x_1, ..., x_i, . . . , x_n, . . . \}$.
  - **UZORAK** je OGRANIČENI NIZ, ili podskup slučajnih vrednosti rezultata merenja: $U_k=\{x_1, x_2, x_3, . . . , x_k\}$.
  - **SERIJA** je OGRANIČENI NIZ, ili podskup ODABRANIH uzoraka iz populacije: $S_m=\{U_1, U_2, U_3, . . . , U_m\}$
- **OBRADA REZULTATA MERENJA** podrazumeva skup svih aktivnosti **TOKOM** i **NAKON** merenja.
- Cilj obrade rezultata merenja jeste da se **ODREDI** (proceni) NAJVEROVATNIJA VREDNOST rezultata merenja sa **ŠTO MANJIM** brojem ponovljenih mernih postupaka.

# Aritmetička sredina

- Ako je $X_0$ tačna vrednost, već znamo da je **APSOLUTNA GREŠKA** svakog pojedinačnog merenja:

$$\Delta X_n = X_n - X_0$$

je (takođe) **SLUČAJNA VELIČINA**!

- Sabiranjem levih i desnih strana jednačine se može pokazati da je:

$$\Delta X_1 + \Delta X_1 + \Delta X_1 + \cdots \Delta X_1 = X_1 + X_2 + \cdots X_n - nX_0$$

Odakle se dobija:

$$X_0 = \underbrace{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots X_n)}_{\text{Aritmetička sredina}} - \frac{1}{n}(\Delta X_1 + \Delta X_2 + \cdots \Delta X_n)$$

- Odnosno:

0, n→∞

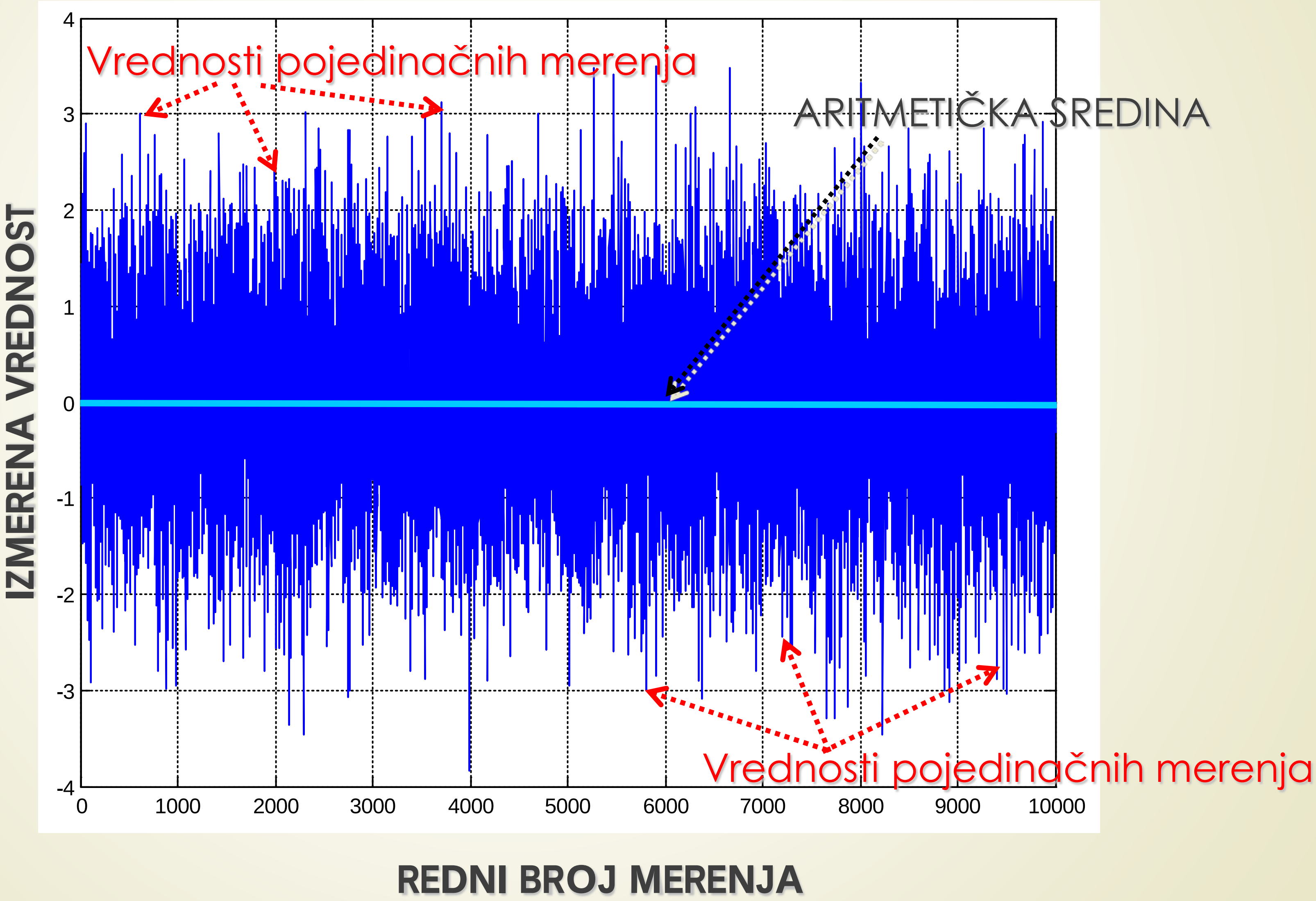
$$X_0 = \bar{X} - \frac{1}{n}\left[\sum_{1}^{n} \Delta X_i\right]$$

$$n \to \infty$$

$$\Delta X_i \to 0$$

$$X_0 \to \bar{X}$$

# Grafički prikaz mernih podataka



# Aritmetička sredina

- Tako, kod ponovljenih merenja ima se:

$$\bar{X} = \frac{n_1 X_1 + \cdots + n_k X_k}{n_1 + \cdots + n_k} = \frac{1}{n}\left[\sum_{1}^{k} n_i X_i\right]$$

- Gde je $n_i$ **UČESTANOST** (frekvencija) izmerene vrednosti $X_i$.
- Pri dovoljno velikom n ($n \to \infty$ ), **RASPODELA UČESTANOSTI** slučajnih grešaka se pokorava **GAUSOVOM ZAKONU**.
- Prema **GAUSOVOM ZAKONU**, najveća verovatnoća učestanosti se određuje iz uslova da funkcija f(A) ima **MINIMALNU VREDNOST**!

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - A)^2$$

Suma kvadrata greške koju treba minimizirati

# Obrada rezultata merenja

- Funkcija f(A) predstavlja ODSTUPANJE i-tog rezultata merenja od veličine A koja sa NAJVEĆOM VEROVATNOĆOM predstavlja NAJBOLJU APROKSIMACIJU tačne vrednosti $X_o$.
- Kvadrat ove razlike treba da bude **MINIMALAN** u svakom pojedinačnom merenju!
- Uslov minimima funkcije se dobija kada je: f´(A) = 0:

$$-2\sum_{i=1}^{n}(X_i - A) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n \cdot A$$

Najbolja aproksimacija!

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} = \bar{X}$$

# Standardna devijacija STD (1)

- Za **PROCENU REZULTATA MERENJA** koristi se **SREDNJA KVADRATNA GREŠKA POJEDINAČNOG MERENJA** ili **STANDARDNA DEVIJACIJA** (STD).
- **STD** je pretpostavljena (kaže se i hipotetička) **GREŠKA** (s) koju treba učiniti **U SVAKOM MERENJU** da bi ona dala **ISTU SUMU KVADRATA GREŠAKA** koju imaju STVARNE apsolutne greške.
- Za teorijski **BESKONAČNO** veliki broj merenja ($n \rightarrow \infty$) ova veličina – standardna devijacija se obeležava sa (s) (sigma), ali se u praksi uvek radi samo sa **KONAČNIM BROJEM** MERENJA, tako da se dobijena veličina obeležava sa s.
- Prema definiciji standardne devijacije ma se:

$$ns^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_0)^2$$

Varijansa

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_0)^2 \qquad s \rightarrow \sigma \, , n \rightarrow \infty$$

# Standardna devijacija STD (2)

- U zadacima se koriste sledeći obrasci u kojima umesto $X_o$ figuriše $\bar{X}$ , tako da se ima:

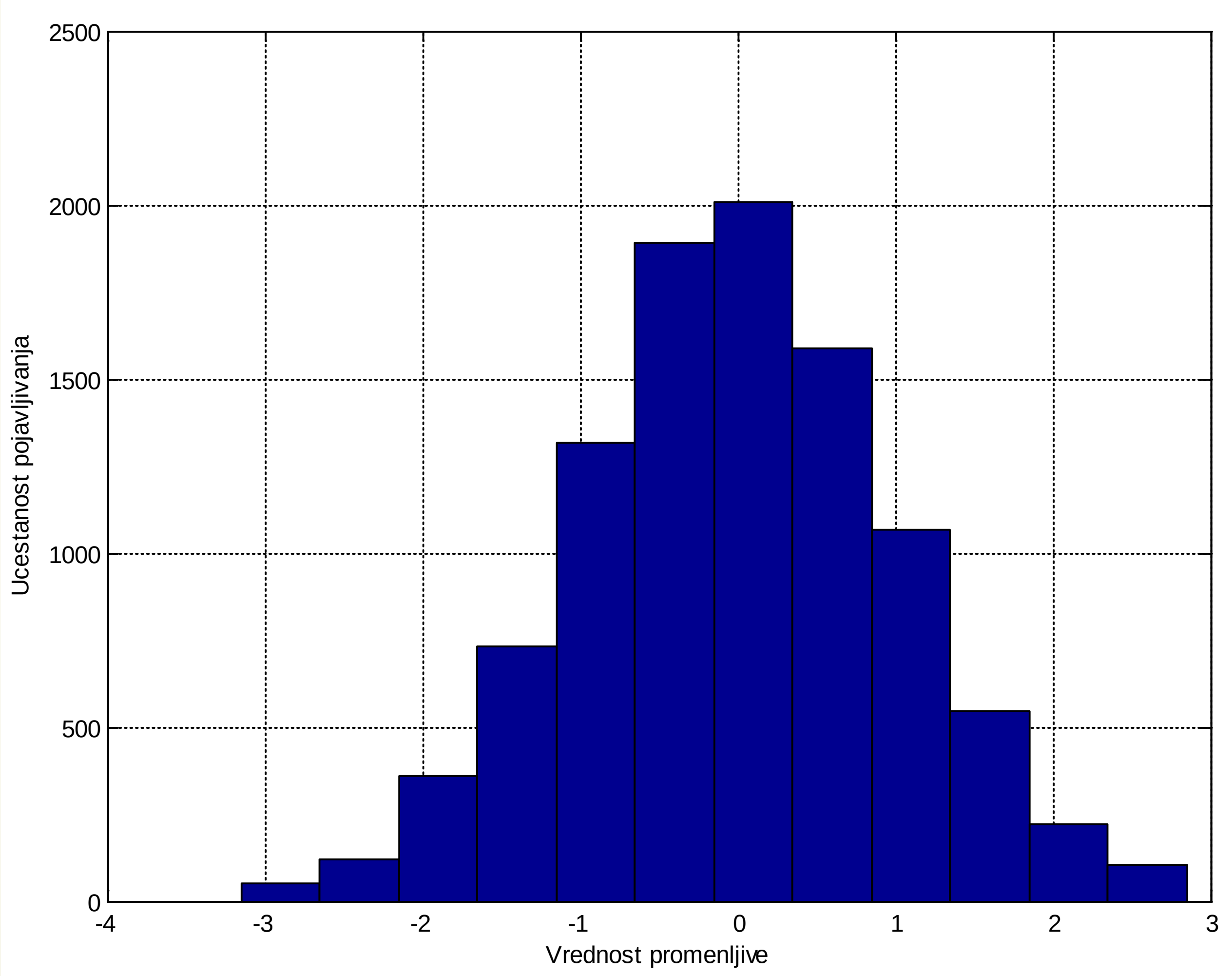
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

- Kod višestrukog merenja pojedine fizičke veličine zbog neodstranjenih SLUČAJNIH GREŠAKA, rezultati pojedinih merenja se **RASIPAJU OKO SREDNJE VREDNOSTI**!
- Jasno je da će se pojedini rezultati merenja će se **PONOVITI**, kada se nazivaju **UČESTANOST IZMERENE VREDNOSTI**.
- Ako se dobijeni rezultati merenja predstave u **2D PROSTORU**:

  **merena_vrednost ~ normalizovana_učestanost_pojavljivanja**

  dobija se grafik pod nazivom **HISTOGRAM**.
- Ako $n \to \infty$, umesto **HISTOGRAMA** govori se o **GUSTINI VEROVATNOĆE**.

# Histogram/Gustina verovatnoće



# Rezultat merenja kao slučajna veličina (1)

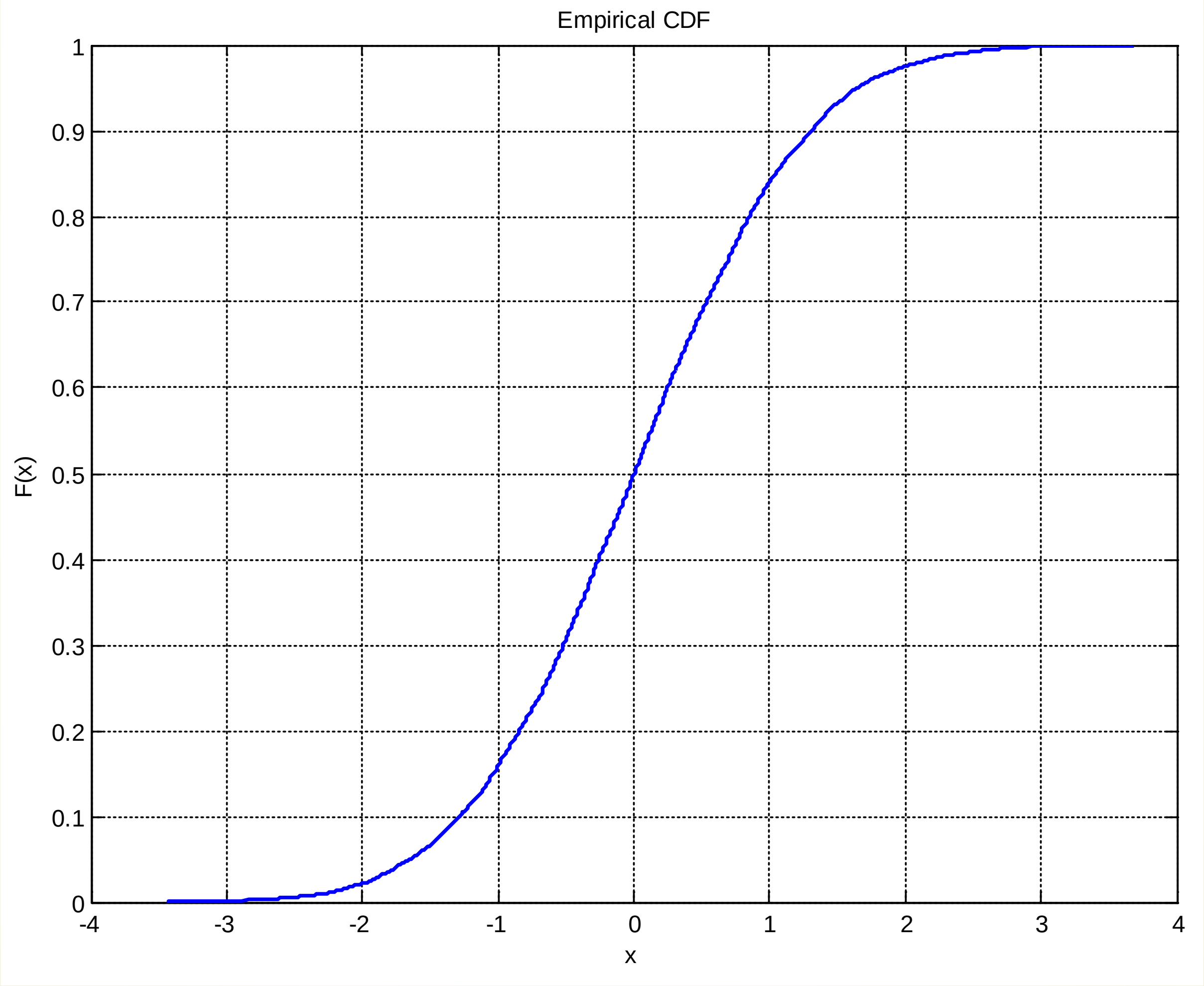
- Funkcija **RASPODELE VEROVATNOĆE** (ili **Integralni zakon verovatnoće**) slučajne vrednosti veličine, Xi , jeste **VEROVATNOĆA POJAVLJIVANJA SLUČAJNE VELIČINE** X koja je manja od Xi:

$$F(X_i) = P(X < X_i) = \sum_{i, X < X_i} p_i$$

- Grafik funkcije **RASPODELE VEROVATNOĆE** je **MONOTONO RASTUĆA FUNKCIJA** sa graničnim vrednostima $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1.$
- **VEROVATNOĆA** da se slučajna veličina X nađe u intervalu Δx jeste razlika vrednosti funkcije raspodele verovatnoća $F(x_i)$ i $F(x_i+\Delta x)$:

$$F(x_i+\Delta x) - F(x_i) = P(x_i < X < x+\Delta x) = P(X < x_i+\Delta x) - P(X < x_i)$$

# Integral gustine raspodele verovatnoće

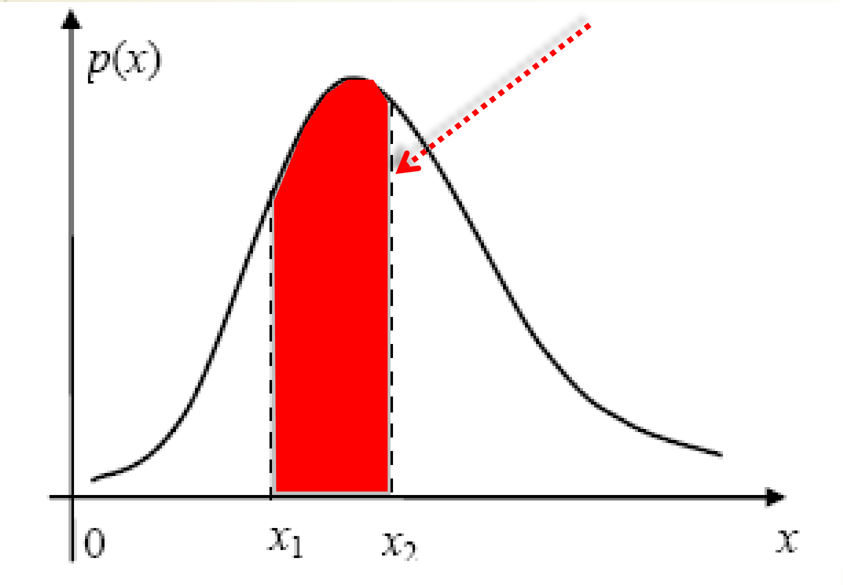


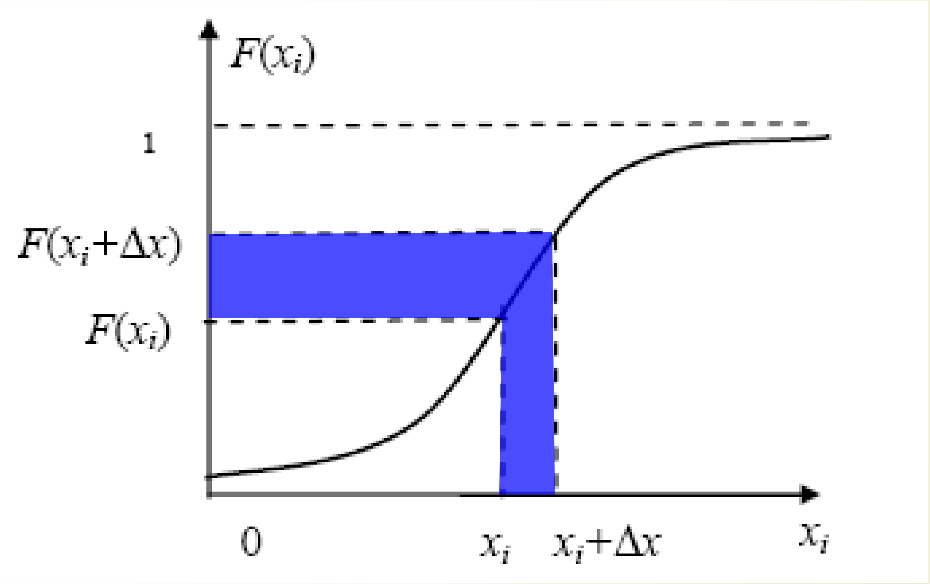

Gustina verovatnoće

Izmerena vrednost

# Gustina/integral raspodele verovatnoće

$p(x_1 < X < x_2)$




**GUSTINA** raspodele verovatnoće

p(x)

**INTEGRAL** gustine raspodele verovatnoće

F(x)

$$p(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

# Diferencijal verovatnoće

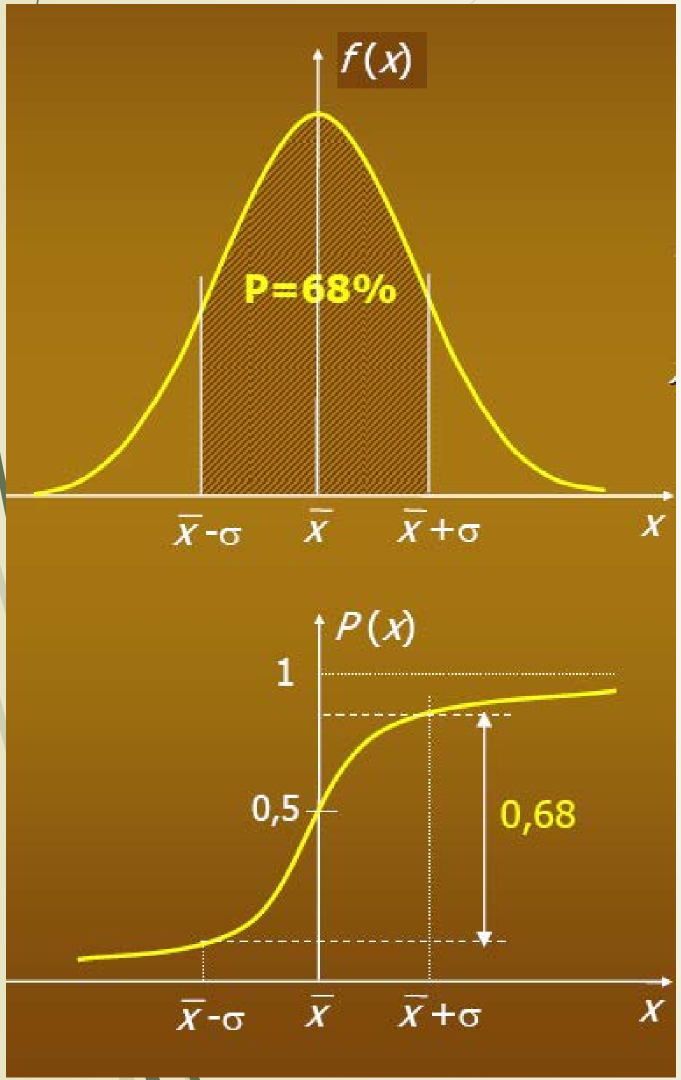
- Ova verovatnoća predstavlja **DIFERENCIJAL VEROVATNOĆE** čija je vrednost brojno jednaka **POVRŠINI ISPOD FUNKCIJE** F($x_i$) na intervalu Δx.
- Ova površina se može dobiti kao proizvod određenog parametra verovatnoće p(x) i intervala Δx:

$$\mathrm{p}(x_i < X < x_i + \Delta x) = \Delta p = p(x_i) \cdot \Delta x$$ ili

$$\mathrm{p}(x_i) = \frac{\Delta p}{\Delta x}$$ tako da je $$\mathrm{F}\big(x_i = p(X < x_i)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$$

$$\mathrm{F}(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

# Normalna – Gausova raspodela




**DVO-PARAMETARSKA** FUNKCIJA NORMALNE (GAUSOVE) RASPODELE:

1. parametar: **STANDARDNA DEVIJACIJA** $\sigma$.
2. parametar: **SREDNJA VREDNOST** $\bar{x}$ .

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

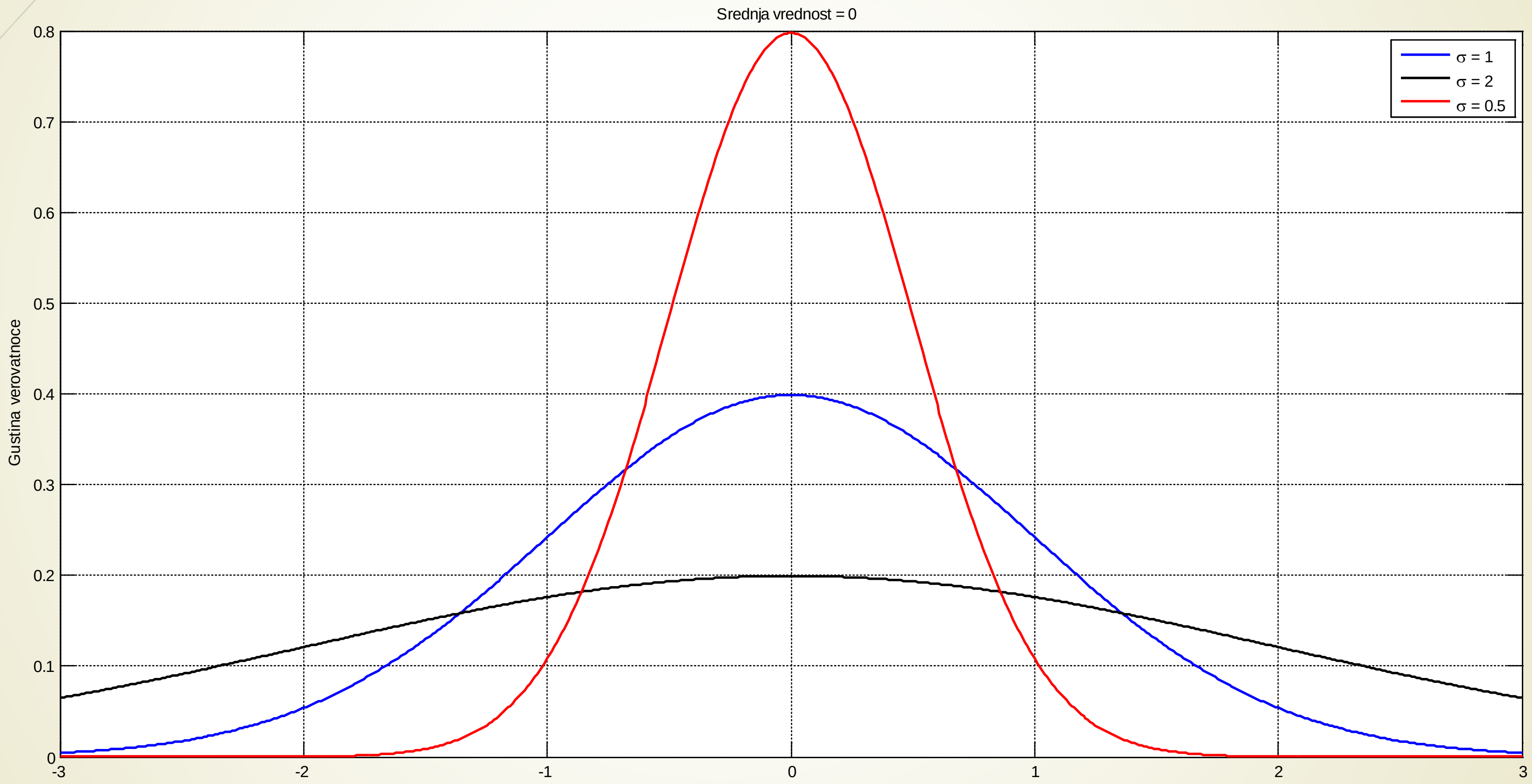
Za Normalnu (Gausovu) raspodelu verovatnoća greške na intervalu:

$$\bar{x} - \sigma < x < \bar{x} + \sigma$$

i iznosi:

$$p(\bar{x} - \sigma < x < \bar{x} + \sigma) = \int_{-\infty}^{\bar{x}+\sigma} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\bar{x}-\sigma} f(x)dx = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} f(x)dx = \mathbf{0.68}$$

# Parametar Normalne raspodele, $\sigma$




Uticaj parametra $\sigma$ na oblik raspodele verovatnoće u odnosu na centar raspodele

# Normalna raspodela slučajne veličine

- Za fizičke veličine sa **NORMALNOM RASPODELOM** važi da je verovatnoća **P=0.68** da se tačna vrednost merene veličine X nalazi u opsegu **±σ**:

$$\bar{x} - \sigma < X < \bar{x} + \sigma$$

- Za veličine sa NORMALNOM RASPODELOM važi da je verovatnoća P=0.95 da se tačna vrednost merene veličine X nalazi u opsegu **±2σ** :

$$\bar{x} - 2\sigma < X < \bar{x} + 2\sigma$$

- **PROCENA** najverovatnije vrednosti merene veličine je srednja vrednost niza ponovljenih rezultata merenja.
- **SREDNJA VREDNOST**, **STANDARDNA DEVIJACIJA** i **SREDNJA VREDNOST ARITMETIČKE SREDINE** se definišu na sledeći način (respektivno):

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad s \approx \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \qquad \bar{s}(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

# Tablica normalne raspodele

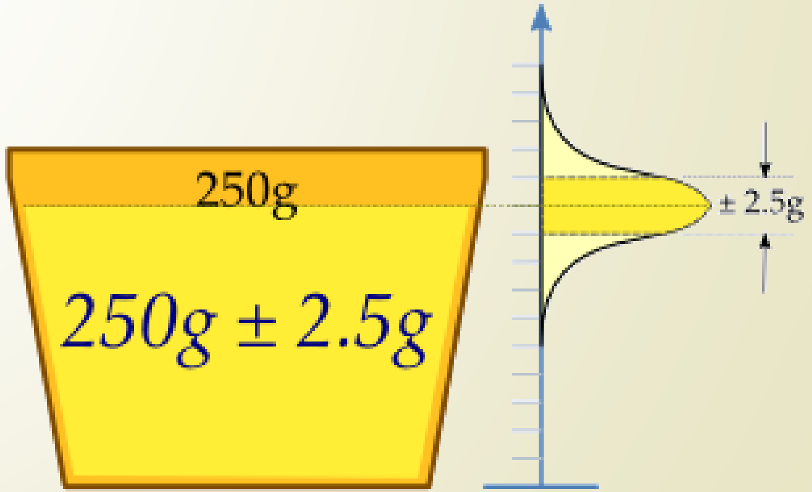
| OPSEG | VEROVATNOĆA |
|---|---|
| $\bar{x} - \sigma < X < \bar{x} + \sigma$ | 68.3% |
| $\bar{x} - 2\sigma < X < \bar{x} + 2\sigma$ | 95.5% |
| $\bar{x} - 3\sigma < X < \bar{x} + 3\sigma$ | 99.7% |
| $\bar{x} - 4\sigma < X < \bar{x} + 4\sigma$ | 99.99% |

# Interval tolerancije

- Potrebno je još odredi **INTERVALNU VREDNOST** (intervalna procena) **NAJVEROVATNIJEG REZULTATA MERENJA** i **DISPERZIJU** (stepen rasipanja) **OKO PRAVE VRE**dnosti merene veličine.
- **PRAVA VREDNOST** se sa izvesnom verovatnoćom nalazi u "**INTERVALU TOLERANCIJE**" oko rezultata merenja - **ŠIRINA OVOG INTERVALA** određena je **MERNOM NESI**GURNOŠĆU.
- Izmerena vrednost je **CENTRALNI ELEMENT NIZA** kojim je predstavljena izmerena veličina.
- **MERNA NESIGURNOST** je parametar **PRIDRUŽEN MERNOM REZUL**TATU koji opisuje **RASIPANJE VREDNOSTI** koje bi se **RAZUMNO** mogle pripisati merenoj veličini.
- **STANDARDNA NESIGURNOST** je jednaka **STANDARDNOJ DEVIJACIJI** veličine za koju je data nesigurnost.

# Merna nesigurnost (1)

- Generalno, **MERNA NESIGURNOST** se sastoji iz **DVE KOMPONENTE**:
  - Komponente koje se izračunavaju na osnovu **STATISTIČKE RASPODELE REZULTATA MERENJA**,
  - Komponente koje se nalaze iz njihove **OČEKIVANE VEROVATNOĆE**.
- Prema TEORIJI VEROVATNOĆE, zakon verovatnoće slučajne veličine karakterišu:
  - **FUNKCIJA RASPODELE VEROVATNOĆE**,
  - **FUNKCIJA GUSTINE VEROVATNOĆE i MOMENTI**.



# Merna nesigurnost (2)

- Određujući **PODRUČJE NESIGURNOSTI** pretpostavljeno je da su otklonjenje sve **SISTEMATSKE GREŠKE** (što naravno nije čest slučaj)!
- **NEPOZNATE SISTEMATSKE GREŠKE** se mogu **PROCENITI** tako što se na mernu nesigurnost (aritmetičke sredine) iz n pojedinačnih merenja **DODAJE PROCENJENA VREDNOST SISTEMATSKIH GREŠAKA** f :

$$u = \pm\left[\left|\frac{t}{\sqrt{n}}s\right| + |f|\right]$$

- Tako se konačni rezultat predstavlja u obliku: $\bar{x} \pm u$
- **Merna nesigurnost** *u* se može smanjiti **POVEĆANJEM BROJA EKSPERIMENATA**, ali samo do određene granice.
- Generalno **NEMA SVRHE** obaviti preterano mnogo eksperimenata!
- Za bolje procene merne nesigurnosti koriste se **DVA POSTUPKA**:
  - **PONAVLJANJE** eksperimenta i
  - **UPOREDNI** eksperimenti.

# Područje pouzdanosti

- Kada je **POZNATA STANDARDNA DEVIJACIJA** $\sigma$ - PODRUČJE POUZDANOSTI se definiše kao:

$$x_0 = \bar{x} \pm \frac{k}{\sqrt{n}}\sigma \qquad \text{ili} \qquad \bar{x} - \frac{k}{\sqrt{n}}\sigma < x_0 < \bar{x} + \frac{k}{\sqrt{n}}\sigma$$

- n - predstavlja broj merenja,
- k - konstanta koja zavisi od željenog područja pouzdanosti P.

- Tako za k=1 ima se P=68.28%,
- Tako za k=2 ima se P=95.44%,
- Tako za k=3 ima se P=99.73%,
- Tako za k=4 ima se P=99.99%

- Laboratorijska vežba 10.

# Područje pouzdanosti i Studentova raspodela

- **PODRUČJE POUZDANOSTI** za merenja kod kojih **NIJE POZNATA STANDARDNA DEVIJACIJA** i **MALI BROJ MERENJA** određuje se putem **STUDENTOVE** (*t*-raspodela) raspodele, odnosno:

$$x_0 = \bar{x} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s \qquad \text{ili} \qquad \bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s < x_0 < \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} s$$

- Tako ako se želi P=0.68, za n=3, t=1,32
  *za n=10, t=1.06*
  *za n=100, t=1.00*
- Tako ako se želi P=0.95, za n=3, konstanta t=4.3
  za n=10, t=2.3
  za n=100, t=2.00
- Tako ako se želi P=0.99, za n=3, konstanta t=9.92
  za n=10, t=3.25
  za n=100, t=2.6