1. Signali

1. 1. Prikaz signala

1.1.1. Pretpostavimo da je signal, napon iz električne mreže $V_{eff} = 220V$, $f = 50Hz$. Signal prikazati kao analitičku funkciju, tablično i grafički.

Rješenje:

Maksimalna vrijednost napona je $V_{max} = 220 \cdot \sqrt{2} = 311V$. Frekvencija zadanog signala f = 50 Hz, te je perioda signala T = 1/f = 20 ms. Početna fazni kut harmonijskog - kosinusnog signala je $\varphi_0 = 0°$.

Izraz za trenutnu vrijednost napona je

$$v(t) = V_{max} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = 311 \cos(2 \pi f t + \varphi_0)$$

Analitička funkcija kojom je prikazan promatrani signal je:

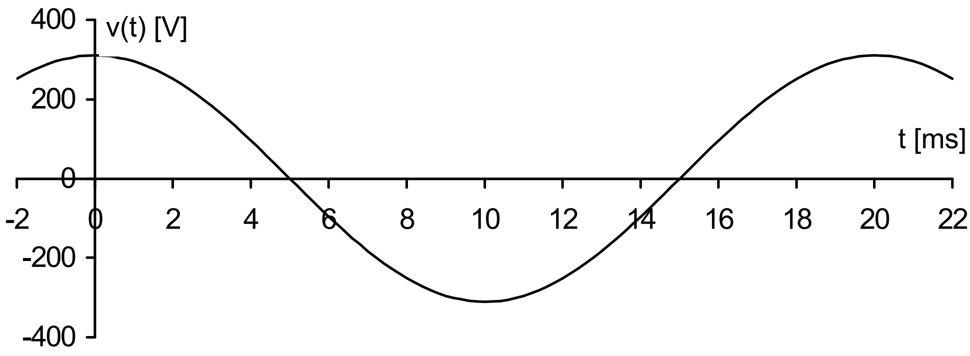
$$v(t) = 311 \cos(314 t) \qquad [V]$$

Želimo prikazati jednu periodu signala T=20 ms, te za neovisnu varijablu – vrijeme odabiremo nekoliko vrijednosti u rasponu od 0 ms do 20 ms. Za crtanje grafa pogodno je imati što više točaka, ali je tada i izračun vrijednosti funkcije obimniji, te se odlučujemo za kompromis, 8 do 20 točaka po periodi.

Formiramo tablicu sa 20 trenutnih vrijednosti napona v(t):

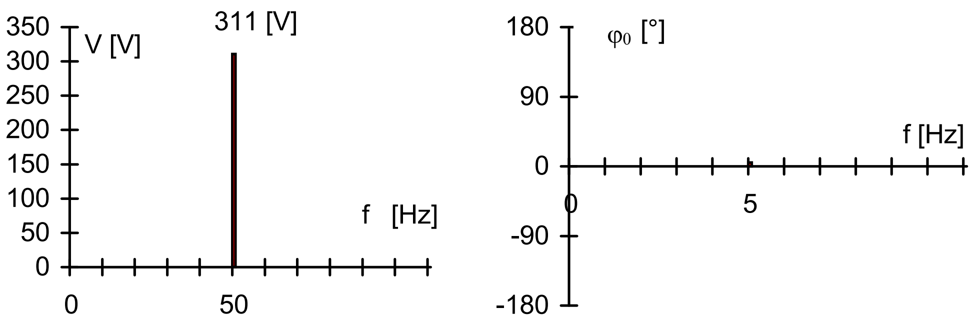
t[ms]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v(t)[V]	311,0	295,8	251,6	182,6	96,1	0	-96,1	-182,6	-251,6	-295,8
t[ms]	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
v(t)[V]	-311,0	-295,8	-251,6	-182,6	-96,1	0	96,1	182,6	251,6	295,8

Sada možemo nacrtati graf signala, funkcije $v(t) = 311 \cos(314 \cdot t)$.



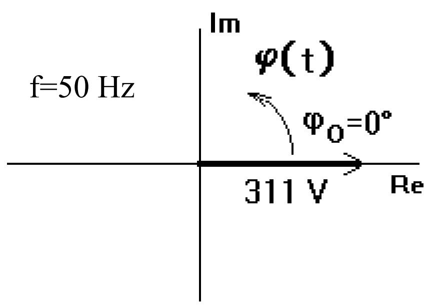
Slika 1. Graf signala v(t)=311 cos(314t) [V]

Amplitudu i fazu signala u ovisnosti o frekvenciji (spektre amplituda i faza) crtamo u pravokutnom koordinatnom sustavu:



Slika 2. Spektar amplituda i spektar faza signala v(t)=311 cos(314t) [V]

Amplitudu i početnu fazu za poznatu frekvenciju f=50 Hz, grafički je moguće prikazati u polarnom koordinatnom sustavu.



Slika 3. Fazorski prikaz signala v(t)=311 cos(314t) [V]

1.1.2. Signal je zadan jednadžbom:

$$s(t) = 10 \sin (12566{,}36 \cdot t) + 15 \sin (18849{,}56 \cdot t + 0{,}5236) \quad [V]$$

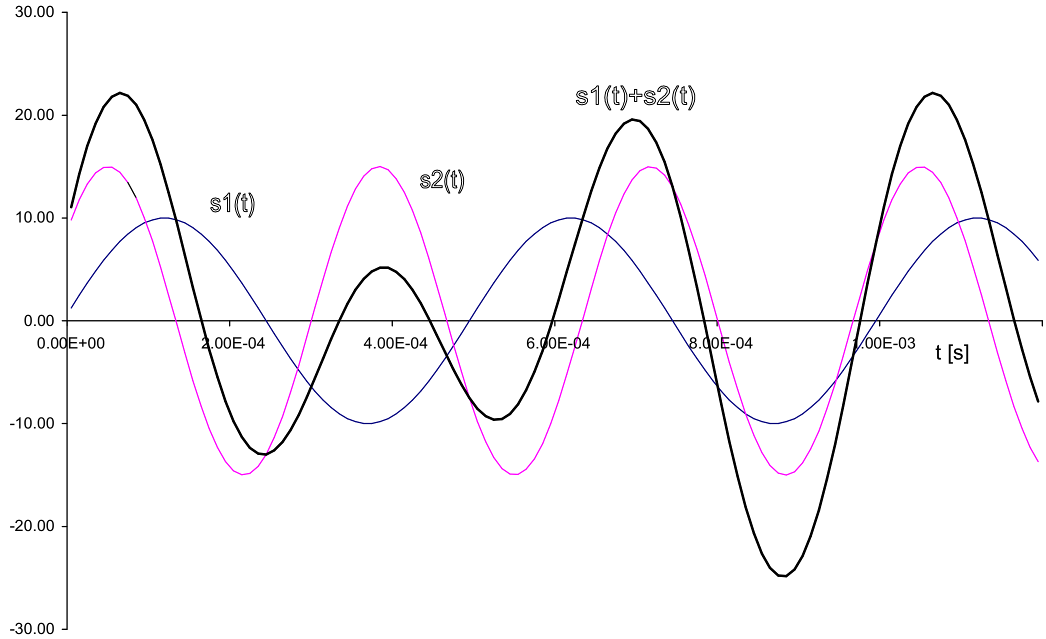
Grafički prikazati signal u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Nacrtati fazorski prikaz signala.

Rješenje:

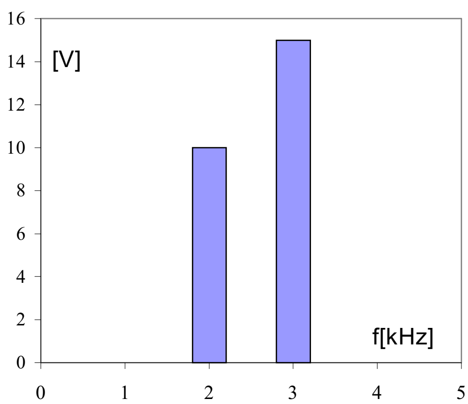
Iz jednadžbe kojom je signal zadan, odmah je moguće zaključiti, da je sastavljen od dvije harmonijske – sinusne komponente:

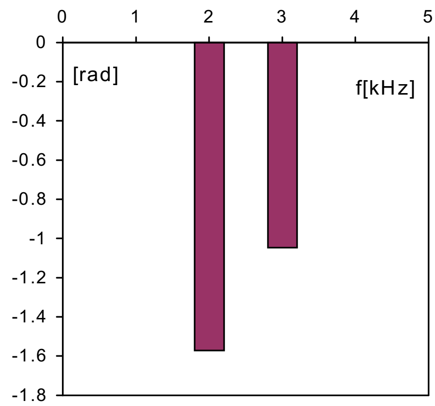
	Amplituda S_i $[V]$	Frekvencija f_i $[Hz]$	Početni kut u izrazu za $s(t)$ φ_0 $[rad]$
$s_1(t)$	10	2000	0
$s_2(t)$	15	3000	$\pi/6$

Perioda signala $s_1(t)$ je 1/2000 = 0,5 ms, a signala $s_2(t)$ je 1/3000 = 0,33... ms. Perioda zbroja $s(t)$ je T = 1 ms, te taj vremenski interval i uzimamo za crtanje signala. Primjenom programa Microsoft Excel, izračunate su vrijednosti (Δt = 10 μs, 120 vrijednosti) i nacrtan je graf. Zbog velikog broja vrijednosti, tablica nije ispisana.

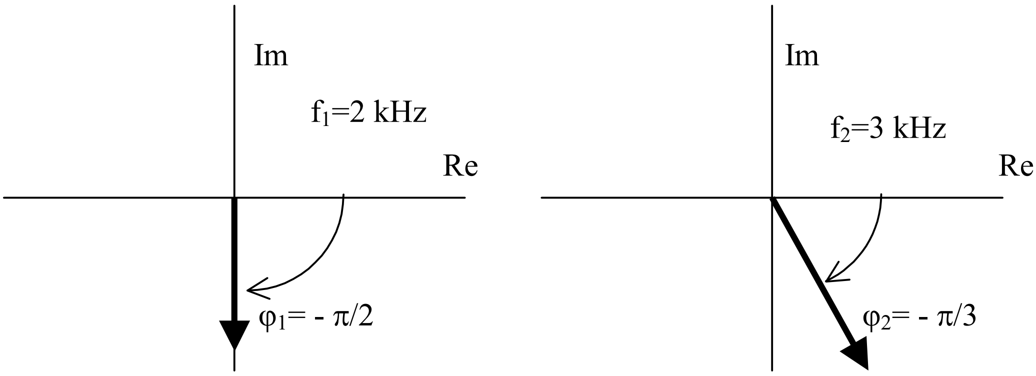


Slika 1. Grafovi signala $s_1(t)$, $s_2(t)$ i $s_1(t) + s_2(t)$





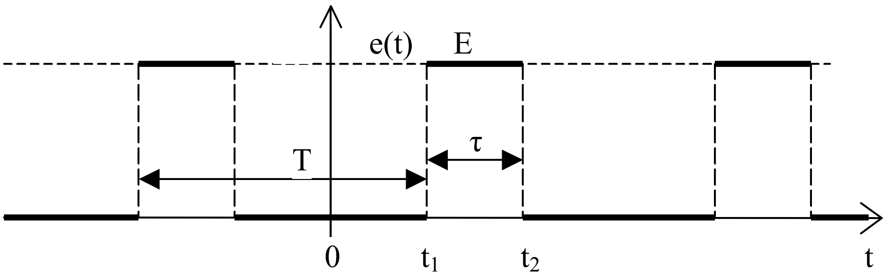
Slika 2. Spektar amplituda i spektar faza signala $s(t)$



Slika 3. Fazorski prikazi signala $s_1(t)$ i $s_2(t)$

1. 2. Spektar periodičnog signala - Fourierov red

1.2.1. Odrediti spektar periodičnog slijeda pravokutnih impulsa valnog oblika prikazanog na slici:



Slika 1. Periodični slijed pravokutnih impulsa

Rješenje:

Signal je moguće prikazati izrazom:

$$e(t) = \begin{cases} E & t_1 < t \le t_2 \\ 0 & \text{ostatak periode T} \end{cases} \tag{1}$$

Spektar zadanog signala odrediti ćemo primjenom Fourierova reda trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija. Fourierov red trigonometrijskih funkcija prikazan je slijedećim izrazom:

$$e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t \right) \qquad k = 1,2,3... \tag{2}$$

Osnovna frekvencija ω_1 jednaka je :

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

Koeficijente reda a_k određujemo kao:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} e(t)\ \cos k\omega_1 t\ \ dt \tag{4}$$

Imajući u vidu definirani signal *e(t)* (1), izraz (4) postaje:

$$a_k = \frac{2E}{T}\int_{t_1}^{t_2} \cos k\omega_1 t\ \ dt \tag{5}$$

Rješavanjem integrala dobije se :

$$a_k = \frac{2E}{k\omega_1 T}\left[\sin\ k\omega_1 t_2 - \sin\ k\omega_1 t_1\right] \tag{6}$$

Slično, za koeficijente uz sinusne komponente Fourierovog reda, dobije se:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} e(t)\ \sin k\omega_1 t\ \ dt \tag{7}$$

$$b_k = \frac{2E}{T}\int_{t_1}^{t_2} \sin k\omega_1 t\ \ dt \tag{8}$$

$$b_k = -\frac{2E}{k\omega_1 T}\left[\cos\ k\omega_1 t_2 - \cos\ k\omega_1 t_1\right] \tag{9}$$

Iz izraza (4), za koeficijent istosmjerne komponente (k=0), dobije se izraz:

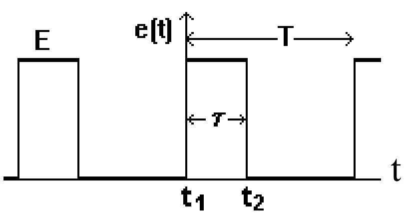
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} e(t)\ \ dt \tag{10}$$

$$a_0 = \frac{2E}{T}\int_{t_1}^{t_2} dt \tag{11}$$

$$a_0 = \frac{2E}{T}\left(t_2 - t_1\right) = \frac{2E}{T}\tau = 2E\frac{\tau}{T} \tag{12}$$

Uvođenjem oznake $\alpha = \frac{\tau}{T}$, a_0 konačno je :

$$a_0 = 2E\alpha \tag{13}$$



Slika 1a. Signal pomaknut po vremenskoj osi, tako da je t_1=0

Ako je $t_1 = 0$ tada je $t_2 = \tau$, te se izraz (6) pojednostavi:

$$a_k = \frac{2E}{k\omega_1 T}\left[\sin\ k\omega_1\tau\right] \tag{14}$$

Uvrštavanjem (3) u (14), dobije se:

$$a_k = \frac{2E}{k\frac{2\pi}{T}T}\left[\sin\ k\frac{2\pi}{T}\tau\right] \tag{15}$$

$$a_k = \frac{E}{k\pi}\left[\sin\ 2k\pi\alpha\right] \tag{16}$$

Slično, iz (9) za b_k, dobije se:

$$b_k = \frac{2E}{k\omega_1 T}\left[1-\cos\ k\omega_1\tau\right] \tag{17}$$

$$b_k = \frac{E}{k\pi}\left[1-\cos 2k\pi\alpha\right] \tag{18}$$

Pomicanjem signala po vremenskoj osi, koeficijent istosmjernog člana se ne mijenja:

$$a_0 = 2E\alpha \tag{13}$$

Za svako k u izrazu (2) imamo po dvije komponente: kosinusnu i sinusnu. To znači, da je amplituda k-tog harmonika A_k jednaka:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \tag{19}$$

Uvrštavanjem (16) i (18) u (19), dobije se:

$$A_k = \sqrt{\left[\frac{E}{k\pi}\sin 2k\pi\alpha\right]^2 + \left[\frac{E}{k\pi}\left(1-\cos 2k\pi\alpha\right)\right]^2} \tag{20}$$

$$A_k = \frac{E}{k\pi}\sqrt{\left[\sin 2k\pi\alpha\right]^2 + \left[\left(1-\cos 2k\pi\alpha\right)\right]^2} \tag{21}$$

$$A_k = \frac{E}{k\pi}\sqrt{\sin^2 2k\pi\alpha + 1 - 2\cos 2k\pi\alpha + \cos^2 2k\pi\alpha} \tag{22}$$

$$A_k = \frac{E}{k\pi}\sqrt{2-2\cos 2k\pi\alpha} \tag{23}$$

Budući je $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, dobije se :

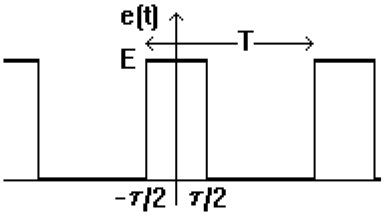
$$A_k = \frac{E}{k\pi}\sqrt{2\left(1-\cos^2 k\pi\alpha + \sin^2 k\pi\alpha\right)} \tag{24}$$

$$A_k = \frac{E}{k\pi}\sqrt{4\sin^2 k\pi\alpha} \tag{25}$$

$$A_k = \frac{E}{k\pi}2\sin k\pi\alpha \qquad \cdot\frac{\alpha}{\alpha} \tag{26}$$

$$A_k = 2E\alpha \frac{\sin k\pi\alpha}{k\pi\alpha} \tag{27}$$

Izrazom (27) određeni su **moduli jednostranog spektra amplituda** slijeda pravokutnih impulsa (1).



Slika 1.b. . Signal pomaknut po vremenskoj osi, tako da je $t_1 = -\tau/2$, $t_2 = \tau/2$

Ako je $t_1 = -\frac{\tau}{2}$, tada je $t_2 = \frac{\tau}{2}$, te se iz (6) dobije:

$$a_k = \frac{2E}{k\omega_1 T}\left[\sin\, k\omega_1\frac{\tau}{2} + \sin\, k\omega_1\frac{\tau}{2}\right] \tag{28}$$

Uvrštavanjem (3) u (28), dobije se :

$$a_k = \frac{2E}{k\frac{2\pi}{T}T}2\left[\sin\, k\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right] \tag{29}$$

$$a_k = \frac{2E}{k\pi}\sin\, k\pi\alpha \qquad \frac{\alpha}{\alpha} \tag{30}$$

$$a_k = 2E\alpha\frac{\sin\, k\pi\alpha}{k\pi\alpha} \tag{31}$$

Za koeficijente b_k dobili bi iz (9) slijedeće:

$$b_k = -\frac{2E}{k\omega_1 T}\left[\cos\, k\omega_1\frac{\tau}{2} - \cos\, k\omega_1\frac{\tau}{2}\right] \tag{32}$$

Kako vidimo, $b_k = 0 \quad \forall k$! To znači, da signal **parnog** valnog oblika u spektru **ne sadrži sinusne** komponente.

Ako je $\alpha = 0{,}5$, dobije se iz (13) za **koeficijent** Fourierovog reda za istosmjernu komponentu:

$$a_0 = E \tag{33}$$

Imajući u vidu (2), **veličina** istosmjerne komponente je:

$$A_0 = \frac{E}{2} \qquad [\text{V}] \tag{34}$$

Uvrštavanjem $\alpha = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ u (31), dobije se

$$a_k = 2E\frac{1}{2}\frac{\sin k\pi\frac{1}{2}}{k\pi\frac{1}{2}} \tag{35}$$

$$a_k = E\frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} \tag{36}$$

Budući je $b_k = 0 \quad \forall k$, to je $A_k = a_k$. Isti bi zaključak dobili i uvrštavanjem $\alpha = 1/2$ u izraz (27). Dakle, amplitude harmonika za pravokutni signal kod kojega je $\alpha = 1/2$, $t_1 = -\tau/2$, $t_2 = \tau/2$, jednake su :

$$A_k = E\frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2}, \quad k = 1,2,3... \tag{37}$$

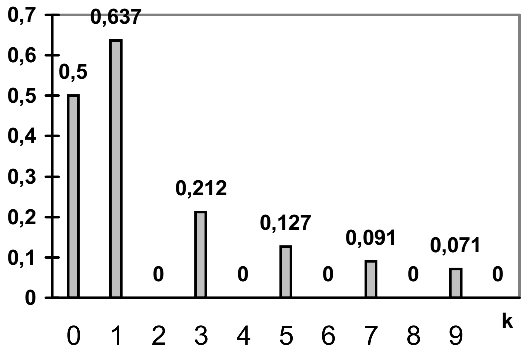
Veličina istosmjerne komponente jednaka je :

$$A_0 = \frac{E}{2} \tag{34}$$

Uvrštavanjem $k = 1,2,3\ldots$ u (37) dobijemo amplitude pojedinih harmonika:

k	0	1	2	3	4	5	6
A	E/2	2E/π	0	2E/3π	0	2E/5π	0
A	0,5 E	0,637 E	0	0,212 E	0	0,127 E	0

Jednostrani spektar ampituda prikazan je grafom na slici 2.



Slika 2. Jednostrani spektar amplituda slijeda pravokutnih impulsa za $\alpha = 1/2$
Komponente su relativne u odnosu na amplitudu impulsa E

Možemo sada postaviti jedno opće pitanje:

Kada u spektru slijeda pravokutnih impulsa amplitude pojedinih harmonika postaju jednake nuli?

Pogledajmo, još jednom, izraz (27):

$$A_k = 2E\alpha \frac{\sin k\pi\alpha}{k\pi\alpha} \qquad k = 1,2,3,4..... \tag{27}$$

Vidimo, da je $A_k = 0$ ako je $\sin k\pi\alpha = 0$, a to je za

$$k\pi \frac{\tau}{T} = i \cdot \pi \qquad i = 1,2,3... \quad i \in N \tag{38}$$

Zaključak je slijedeći:

$A_k = 0$, ako je $k = i \cdot \alpha$. Kako je ***k*** cijeli broj kao i ***i***, to znači da je α recipročna vrijednost cijelog broja. Vidjeli smo, da za $\alpha = 1/2$ 2., 4., 6. ... komponenta imaju vrijednost 0. Slično, za $\alpha = 1/3$, u spektru će izostati 3., 6., 9., 12., ... komponenta, za $\alpha = 1/10$, izostati će svaka deseta, itd.

Ako pretpostavimo da $\alpha \to 0$, ili $\alpha \to 1/\infty$, to znači da će u "jako uskom" impulsu tek harmonik visokog reda (k→∞) biti jednak nuli. Praktično, to znači da "uski" periodični impulsi sadrže veliki broj komponenata - harmonika.

Odredimo, sada, spektar slijeda pravokutnih impulsa primjenom kompleksnih eksponencijalnih funkcija. U tom slučaju, Fourierov red definiran je na slijedeći način:

$$e(T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \tag{36}$$

Koeficijente C_k računamo kao :

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} e(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \qquad k = \ldots -3,-2,-1,0,1,2,3\ldots \tag{39}$$

$$C_k = \frac{E}{T} \int_{t_1}^{t_2} e^{-jk\omega_1 t} dt \tag{40}$$

$$C_k = \frac{E}{T} \frac{1}{-jk\omega_1} \left(e^{-jk\omega_1 t_2} - e^{-jk\omega_1 t_1} \right) \tag{41}$$

Uvrstimo li $t_2 = t_1 + \tau$, dobije se:

$$C_k = \frac{E}{T} \frac{1}{-jk\omega_1} \left(e^{-jk\omega_1 t_1} e^{-jk\omega_1 \tau} - e^{-jk\omega_1 t_1} \right) \tag{42}$$

$$C_k = \frac{E}{T} \frac{1}{-jk\omega_1} e^{-jk\omega_1 t_1} \left(e^{-jk\omega_1 \tau} - 1 \right) \tag{43}$$

Primjenom jednakosti:

$$e^{-jk\omega\tau}-1=e^{-jk\omega\frac{\tau}{2}}\left(e^{-jk\omega\frac{\tau}{2}}-e^{jk\omega\frac{\tau}{2}}\right), \tag{44}$$

od (43) dobije se:

$$C_k=\frac{E}{T}\frac{1}{-jk\omega_1}e^{-j(k\omega_1 t_1+k\omega_1\frac{\tau}{2})}\left(e^{-jk\omega_1\frac{\tau}{2}}-e^{jk\omega_1\frac{\tau}{2}}\right)\quad \frac{\tau/2}{\tau/2} \tag{45}$$

$$C_k=E\frac{\tau}{T}\frac{e^{jk\omega_1\frac{\tau}{2}}-e^{-jk\omega_1\frac{\tau}{2}}}{2jk\omega_1\frac{\tau}{2}}e^{-jk\omega_1(t_1+\frac{\tau}{2})} \tag{46}$$

$$C_k=E\frac{\tau}{T}\frac{\sin k\omega_1\frac{\tau}{2}}{k\omega_1\frac{\tau}{2}}e^{-jk\omega_1(t_1+\frac{\tau}{2})} \tag{47}$$

Ako je $t_1=-\tau/2$ (sl. 1.b.), koeficijenti postaju realni:

$$C_k=E\frac{\tau}{T}\frac{\sin k\omega_1\frac{\tau}{2}}{k\omega_1\frac{\tau}{2}} \tag{48}$$

Kako je $\omega_1=2\pi f_1=\dfrac{2\pi}{T}$, (48) se pojednostavi:

$$C_k=E\alpha\frac{\sin k\pi\alpha}{k\pi\alpha} \tag{49}$$

Za ***k=0*** (istosmjerna komponenta) dobije se :

$$C_0=E\alpha \tag{50}$$

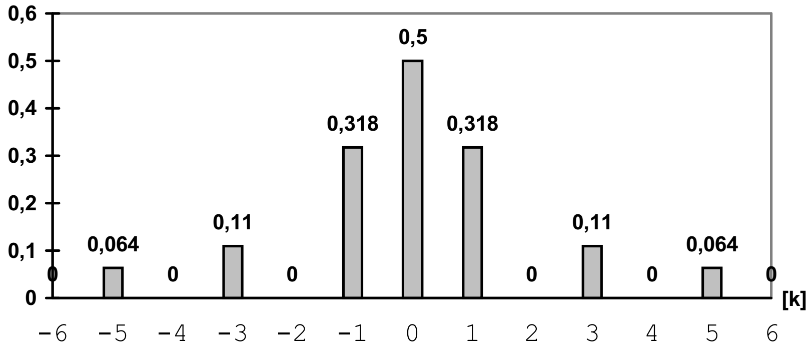
Za $\alpha=0{,}5$, dobijemo

$$C_k=\frac{E}{2}\frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2},\qquad k=\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots \tag{51}$$

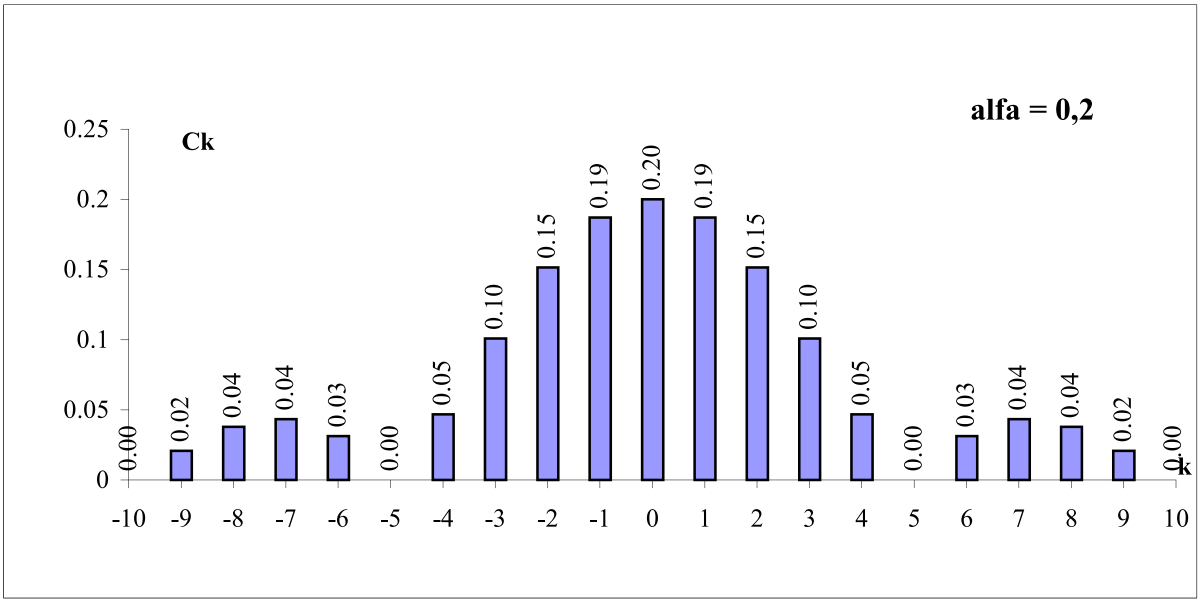
Uvrštavanjem vrijednosti za ***k***, dobijemo tablicu :

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
C_k	- 0,11 E	0	0,318 E	0,5 E	0,318 E	0	- 0,11 E

Prikazan grafom, **dvostrani** spektar amplituda nalazi se na slici 3. Prikazane su **apsolutne** vrijednosti.

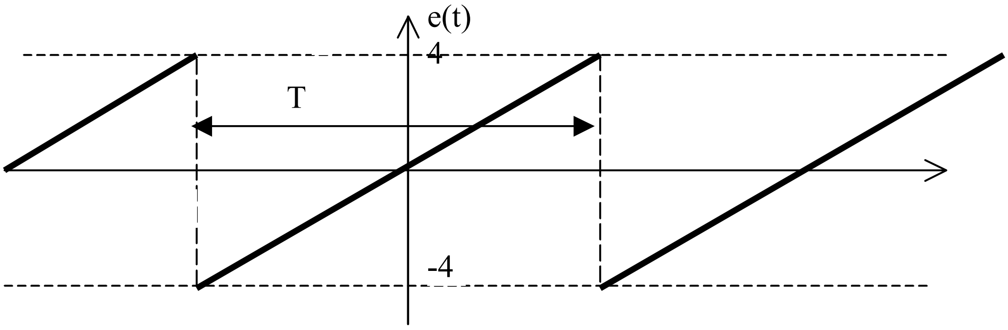


Slika 3. Dvostrani amplitudski spektar slijeda pravokutnih impulsa za $\alpha = 1/2$*, E=1*



Slika 4. Dvostrani spektar amplituda slijeda pravokutnih impulsa za $\alpha = 1/5$*, E=1*

1.2.2. Odrediti spektar "pilastog" signala prikazanog na slici:



Slika 1. Pilasti signal periode T=1 ms i amplitude E=4 V

$$e(t) = 8 \cdot t/T, \quad za \quad -T/2 < t < T/2$$

Rješenje:

Zadani signal neparna je funkcija vremena, te vrijedi:

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad \mathrm{A_k} = b_k$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e(t)\sin k\omega_1 t\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{8}{T} t \sin k\omega_1 t\, dt$$

$$b_k = \frac{16}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} t\sin k\omega_1 t\, dt$$

$$\int x\sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\sin ax}{a}$$

$$b_k = \frac{16}{T^2}\left[\frac{\sin(k\omega_1 t)}{(k\omega_1)^2} - \frac{x\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$b_k = \frac{16}{T^2}\left[\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{\left(k\frac{2\pi}{T}\right)^2} - \frac{\frac{T}{2}\cdot\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{k\frac{2\pi}{T}} - \frac{\sin\left(-k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{\left(k\frac{2\pi}{T}\right)^2} + \frac{-\frac{T}{2}\cdot\cos\left(-k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{k\frac{2\pi}{T}}\right]$$

$$b_k = \frac{16}{T^2}\left[\frac{\sin(k\pi)}{\left(k\frac{2\pi}{T}\right)^2} - \frac{\frac{T}{2}\cdot\cos(k\pi)}{k\frac{2\pi}{T}} - \frac{\sin(-k\pi)}{\left(k\frac{2\pi}{T}\right)^2} - \frac{\frac{T}{2}\cdot\cos(-k\pi)}{k\frac{2\pi}{T}}\right]$$

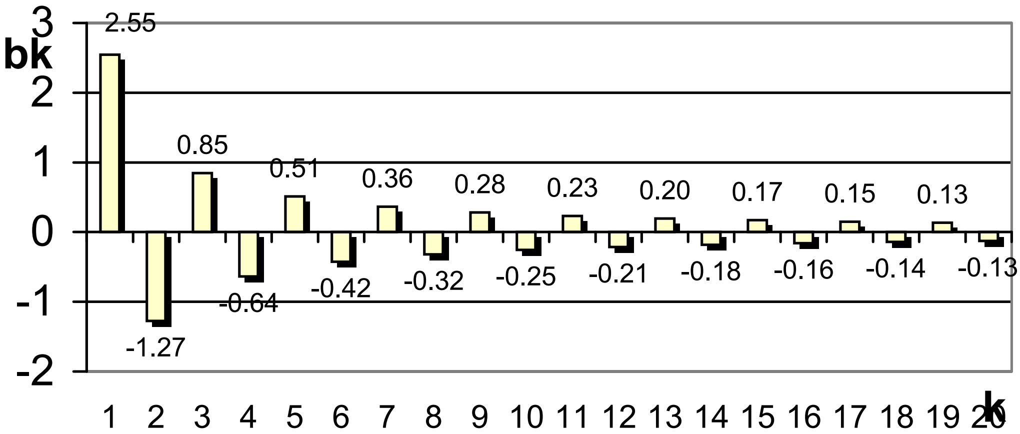
$$b_k = \frac{16}{T^2}\left[0 - \frac{\frac{T}{2}\cdot\cos(k\pi)}{k\frac{2\pi}{T}} - 0 - \frac{\frac{T}{2}\cdot\cos(-k\pi)}{k\frac{2\pi}{T}}\right]$$

$$b_k = \frac{16}{T^2}\left[-\frac{\cos(k\pi)}{k\frac{2\pi}{T^2}}\right]$$

$$b_k = -\frac{8}{k\pi}\cos k\pi, \qquad \mathrm{k} = 1,\ 2,\ 3 \ldots$$

Vrijednost koeficijenta b_k nisu jednake nuli niti za jedno $k \neq 0$. Nekoliko vrijednosti prikazano je u tablici:

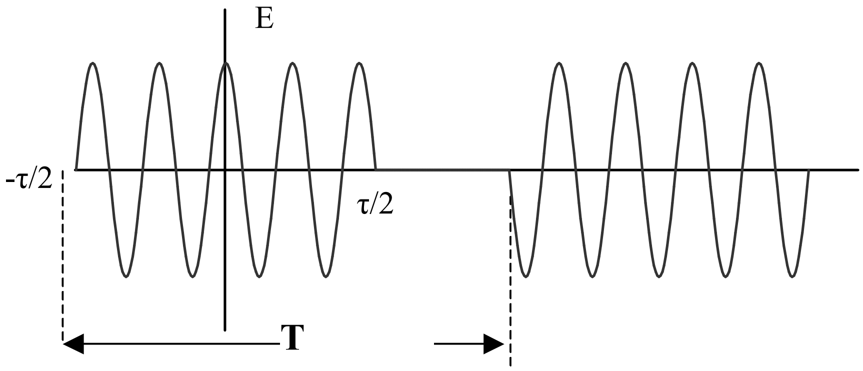
k	1	2	3	4	5	6	7
b_k	2,546479	-1,27324	0,848826	-0,63662	0,509296	-0,42441	0,363783



Slika 2. Koeficijenti b_k *Fourierova reda pilastog signala*

Negativne vrijednosti za b_k znače, da je faza sinusne komponente π [rad] tj. 180º.

1.2.3. Odrediti spektar RF impulsa (isprekidanog harmonijskog signala) prikazanog slikom:



Slika 1. Periodični RF impuls

Rješenje:

Za vremenski interval -τ/2 ≤ t ≤ τ/2 signal je $y(t)=E\cdot\cos\omega t$. Koeficijente Fourierova reda eksponencijalnih funkcija nalazimo kako slijedi:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} y(t)e^{-jk\omega_1 t}dt$$

$$C_k = \frac{E}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}e^{-jk\omega_1 t}dt$$

$$C_k = \frac{E}{2T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left(e^{-j(k\omega_1-\omega_0)t}+e^{-j(k\omega_1+\omega_0)t}\right)dt$$

$$C_k = \frac{E}{2T}\left[\frac{1}{-j(k\omega_1-\omega_0)}e^{-j(k\omega_1-\omega_0)t}+\frac{1}{-j(k\omega_1+\omega_0)}e^{-j(k\omega_1+\omega_0)t}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$C_k = \frac{E}{T}\left[\frac{e^{-j(k\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}} - e^{j(k\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}}}{-j2(k\omega_1-\omega_0)} + \frac{e^{-j(k\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}} - e^{j(k\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}}}{-j2(k\omega_1+\omega_0)}\right]$$

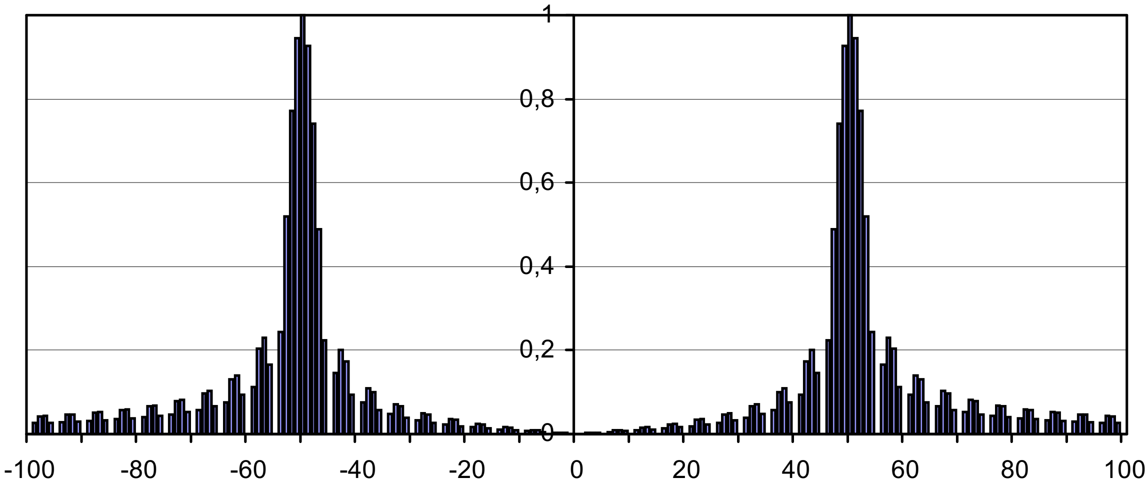
$$C_k = \frac{E}{T}\left[\frac{\sin(k\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{k\omega_1-\omega_0} + \frac{\sin(k\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{k\omega_1+\omega_0}\right] \Big/ \cdot\frac{\tau/2}{\tau/2}$$

$$C_k = \frac{E\tau}{2T}\left[\frac{\sin(k\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(k\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin(k\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(k\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}}\right]$$

Za impulse istosmjernog napona $y(t)=E$ za $-\tau/2<t<\tau/2$ je $\omega_0=0$, te iz prethodnog izraza dobijemo:

$$C_k = \frac{E\tau}{T}\frac{\sin k\omega_1\frac{\tau}{2}}{k\omega_1\frac{\tau}{2}}$$

Ovaj nam je izraz poznat iz prvog primjera (48).



Slika 2. Spektar amplituda RF impulsa za E=10, τ=0,2, T=1, f_1=1 i f_0=50

1.2.4. Odredimo Fourierov red za slijed Diracovih δ-impulsa periode T.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A' \,\delta(t - nT)$$

$f_1 = 1/T$

A' je sadržaj jednog δ-impulsa.

Rješenje:

Pođimo od rezultata iz prvog primjera:

$$A_k = \frac{A\,\tau}{T}\,\frac{\sin k\omega_1\,\tau/2}{k\omega_1\,\tau/2}$$

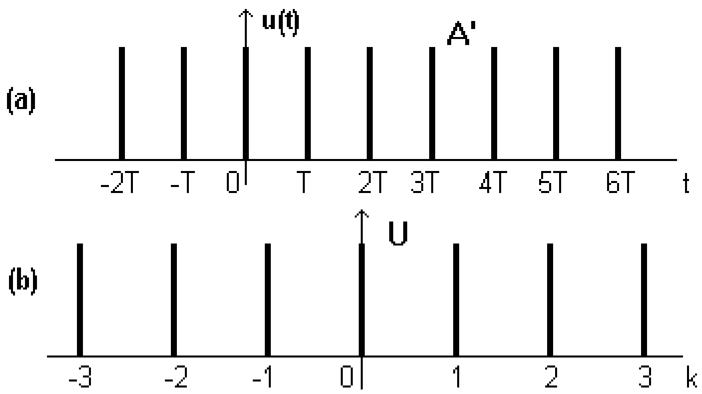
A je amplituda impulsa, T je perioda, a τ je trajanje impulsa.

Ako trajanje impulsa $\tau \to 0$, a istovremeno produkt **A**·τ ostaje neizmijenjen $A \cdot \tau = A'$, tada uz poznati postupak određivanja limesa funkcije (sin x)/x (L'Hospitalovo pravilo), dobije se transformat:

$$U = \frac{A'}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$U = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A'}{T}\,\delta\left(f - k\cdot f_1\right)$$

Grafički prikaz slijeda Diracovih δ-impulsa i Fourierovog transformata je na slici:



Slika 1. Slijed Diracovih δ-impulsa (a) i koeficijenti Fourierova reda (b)