ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА
COLLEGE OF APPLIED TECHNICAL SCIENCES
http://www.vtsnis.edu.rs
e-mail: info@vtsnis.edu.rs

29.06.2018.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задатак 1.

Производ решења једначине $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ је:

а) 2 ; б) -2 ; **в) -4 ;** г) -16 .

Решење:

Дату једначину можемо записати и у следећем облику: $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 10$.
Како је $\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right) = 1$, то је $5-2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$. Коришћењем смене да је $t = \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}$, једначина добија облик: $t + \frac{1}{t} = 10$, односно, $t^2 - 10t + 1 = 0$.
Решења квадратне једначине су: $t_1 = 5-2\sqrt{6}$ и $t_2 = 5+2\sqrt{6}$. Враћањем смене добија се:

$$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 5-2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \ ;$$

$$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 5+2\sqrt{6} = \frac{1}{5-2\sqrt{6}} = \left(5-2\sqrt{6}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \ .$$

Производ решења једначине једнак је -4 , па је тачно решење под **в) -4 .**

Задатак 2.

Вредност израза $\dfrac{(cos^2 x - sin^2 x)(2 + sin\,2x)}{cos^3 x - sin^3 x}$ једнака је:

а) $cos\,x + sin\,x$; **б) $2(cos\,x + sin\,x)$;** в) $cos^2 x + 1$; г) 2.

Решење:

Коришћењем формуле за разлику квадрата, разлику кубова и изражавањем синуса двоструког угла, дати израз је једнак:

$$\frac{(cos^2 x - sin^2 x)(2 + sin\,2x)}{cos^3 x - sin^3 x} = \frac{(cos\,x - sin\,x)(cos\,x + sin\,x)\cdot 2(1 + sin\,x\cdot cos\,x)}{(cos\,x - sin\,x)\left(cos^2 x + cos\,x\cdot sin\,x + sin^2 x\right)} .$$

Скраћивањем истих чинилаца и коришћењем основног тригонометријског идентитета

$sin^2 x + cos^2 x = 1$, добија се: $\dfrac{(cos\,x + sin\,x)\cdot 2(1 + sin\,x\cdot cos\,x)}{1+sin\,x\cdot cos\,x} = 2\,(cos\,x + sin\,x)$,

па је тачно решење под **б) $2(cos\,x + sin\,x)$.**

Задатак 3.

Ако су: $\log_7\left(16\cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right)$, $\frac{x+1}{\log_2 7}$ и $\log_7\left(\frac{1}{32}\cdot 2^{\frac{5x}{3}+7}\right)$ прва три члана аритметичког низа, тада је x једнако:

а) 3; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{5}$; **г)** $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

Решење:

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и сређивањем степена истих основа, добија се:

$$a_1 = \log_7\left(16\cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right) = \log_7\left(2^4\cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right) = \log_7 2^{\frac{4x-1}{3}} \;;$$

$$a_2 = \frac{x+1}{\log_2 7} = (x+1)\log_7 2 = \log_7 2^{x+1} \;;$$

$$a_3 = \log_7\left(\frac{1}{32}\cdot 2^{\frac{5x}{3}+7}\right) = \log_7\frac{2^{\frac{5x}{3}+7}}{2^5} = \log_7 2^{\frac{5x}{3}+2} \;.$$

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, па је:

$$\log_7 2^{x+1} - \log_7 2^{\frac{4x-1}{3}} = \log_7 2^{\frac{5x}{3}+2} - \log_7 2^{x+1} \;.$$

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$\log_7\frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = \log_7\frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}} \;.$$

Сређивањем степена броја 2, добија се:

$$2^{2x+2} = 2^{\frac{9x+5}{3}} \quad\Leftrightarrow\quad 2x+2 = \frac{9x+5}{3} \quad\Leftrightarrow\quad 3x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{3}.$$

Тачно решење задатка је под **г)** $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

Задатак 4.
Обим и површина троугла који образују пресечне тачке праве p: $\boldsymbol{x+y-3=0}$ и кружнице K: $\boldsymbol{x^2+y^2+8y-9=0}$ и центар дате кружнице су:

а) $\boldsymbol{O=10+\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{P=\frac{7}{2}}$;

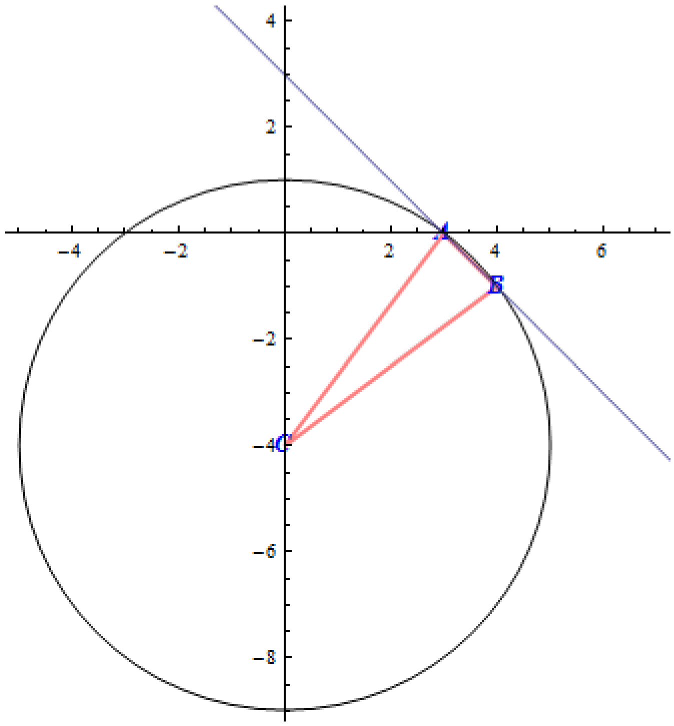
б) $O=\frac{10-\sqrt{2}}{7}$, $P=\frac{-7}{2}$;

в) $O=10-\sqrt{2}$, $P=\frac{2}{7}$;

г) $O=10+\sqrt{2}\,cm$, $P=\frac{7}{2}\ cm^2$.

Решење:

Пресечне тачке праве и кружнице ($\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$) добијамо решавањем система једначина: $\boldsymbol{x+y-3=0}$ и $\boldsymbol{x^2+y^2+8y-9=0}$; $\boldsymbol{A(3,0)}$ и $\boldsymbol{B(4,-1)}$.



Троугао $\boldsymbol{ABC}$ је једнакокраки, јер је $\boldsymbol{AC=BC=r}$. Свођењем једначине кружнице на општи облик, добија се: K: $\boldsymbol{x^2+(y+4)^2=25}$, па је центар кружнице тачка $\boldsymbol{C(0,-4)}$, а полупречник $\boldsymbol{r=5}$. Тако су познате две странице троугла: $\boldsymbol{AC=BC=r=5}$. Трећу страницу $\boldsymbol{AB}$ можемо добити као растојање између две тачке: $\boldsymbol{d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{2}}$. Обим троугла једнак је:

$$\boldsymbol{O=5+5+\sqrt{2}=10+\sqrt{2}}\ .$$

Како су познате координате сва три темена троугла, површину троугла можемо израчунати преко формуле:

$$\boldsymbol{P=\frac{1}{2}\ |x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|=\frac{7}{2}}\ .$$

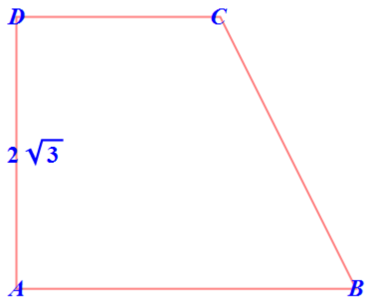
Тачно решење задатка је под а) $\boldsymbol{O=10+\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{P=\frac{7}{2}}$.

Задатак 5.
Површина тела које настаје ротацијом правоуглог трапеза $\boldsymbol{ABCD}$ око мањег крака $\boldsymbol{AD = 2\sqrt{3}\,cm}$, ако је површина трапеза $\boldsymbol{P = 18\sqrt{3}\,cm^2}$ и разлика основица трапеза $\boldsymbol{6cm}$, једнака је:

а) $244\sqrt{3}\,\pi\,cm^2$; б) $(45+18\sqrt{3})4\,\pi\,cm^3$; в) $(180+72\,)\sqrt{3}\pi\,cm^2$; **г)**$\boldsymbol{(180+72\sqrt{3})\,\pi\,cm^2}$.

Решење:

Правоугли трапез који ротира око мањег крака формира зарубљену купу, за коју важи да су полупречници основа једнаки основицама трапеза а висина зарубљене купе једнака је висини, односно, мањем краку трапеза.
Површина зарубљене купе једнака је: $\boldsymbol{P = {r_1}^2\,\pi + {r_2}^2\,\pi + (r_1 + r_1)\pi\, s}$.



Како је површина трапеза једнака:

$$\boldsymbol{P = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\,cm^2 \quad\Rightarrow\quad a+b = 18\,cm} .$$

Како је дата разлика основица $\boldsymbol{a - b = 6\,cm}$, решавањем система добијамо основице, односно полупречнике основа:

$$\boldsymbol{r_1 = a = 12\,cm \quad\Rightarrow\quad {r_1}^2\,\pi = 144\,\pi\,cm^2} ,$$
$$\boldsymbol{r_2 = b = 6\,cm \quad\Rightarrow\quad {r_2}^2\,\pi = 36\,\pi\,cm^2} .$$

Изводница купе добија се Питагорином теоремом: $\boldsymbol{s^2 = BC^2 = h^2 + (a-b)^2 = 48\,cm^2}$, па је $\boldsymbol{s = 4\sqrt{3}\,cm}$ **.**

Површина зарубљене купе једнака је:

$$\boldsymbol{P = {r_1}^2\,\pi + {r_2}^2\,\pi + (r_1 + r_1)\pi\, s = 144\,\pi\,cm^2 + 36\,\pi\,cm^2 + 18cm\,\pi\cdot 4\sqrt{3}\,cm} ,$$

$$\boldsymbol{P = (180 + 72\sqrt{3})\,\pi\,cm^2} .$$

Тачно решење задатка је под **г)** $\boldsymbol{(180+72\sqrt{3})\,\pi\,cm^2}$.
